1 Paskaita. Tikimybės sąvoka ir savybės.

1.1 Įvadas

Dažnai atsiduriame situacijose, kuomet turime priimti vienokį ar kitokį sprendimą, o informacijos apie aplinkybes trūksta. Tuomet, norėdami įvertinti sprendimo pasekmes, turime gretinti įvairias galimybes. Vertindami ir lygindami įvairių ivykių šansus, mes sakome, kad vieni įvykiai turi daugiau šansų, kiti mažiau. Žodžiai "daugiau" ar "mažiau" yra skirti kiekiams lyginti, t.y., kiekiams, kurie atitinka skaičius. Lygindami įvairių įvykių šansus mes operuojame su jais, kaip su skaičiais: didesnes galimybes atitinka didesni skaičiai. Sakome, vieno įvykio tikimybė yra didesnė nei kito. Pasirodo, kad egzistuoja universalūs dėsningumai, kuriems paklūsta daugelis reiškinių, kuriuos vadiname atsitiktiniais. šiuos dėsningumus tiria tikimybių teorija, nesvarbu, kur jie atsiskleidžia: demografijoje, draudimo uždaviniuose, genetikoje, dujų kinetinėje teorijoje, kvantų mechanikoje, ekonomikoje, informatikoje ir kt.

Tikimybių teorijos gimimas siejamas su dviejų iškilių prancūzų: Blezo Paskalio (1623-1662) ir Pjero Ferma (1601-1665) vardais. Yra išlikę keletas jų laiškų, kuriuose gvildenami su lošimo kauliukų metimais susiję uždaviniai. Paskalis rašė, kad uždavinius jam pateikė azartiškas lošėjas ševaljė De Merė. Mokslo istorijoje šie uždaviniai ir jų sprendimas ženklina naujo mokslo pradžią.

1. Porą kauliukų metame K kartų. Nagrinėjame du galimus variantus: (a) bent vieną kartą iškrito šešetukų pora; (b) nė karto neiškrito šešetukų pora. Kokį mažiausią metimų skaičių K atlikus, variantas (a) turi daugiau šansų nei (b)?

2. Du žaidėjai į žaidimo banką įneša po 32 pistolius. Pirmasis laimėjęs tris partijas pasiima iš banko 64 pistolius. Kaip pasidalinti banką, jei tenka žaidimą nutraukti nespėjus nei vienam išlošti trijų partijų?

Pavyzdys. De Merė uždavinys. Kokia tikimybė didesnė: gauti nors vieną šešetuką 4 kartus metus lošimo kauliuką, ar bent 1 kartą 2 šešetukus 24 kartus metus kauliukų porą?

Tikimybė gauti nors vieną šešetuką 4 kartus metus lošimo kauliuką:

$$P_{\geq 1} = 1 - P_0 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177.$$

Tikimybė bent 1 kartą gauti 2 šešetukus 24 kartus metus kauliukų porą:

$$P_{\geq 1} = 1 - P_0 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914.$$

Paskalis ir Ferma išsprendė šiuos uždavinius, nesinaudodami tikimybės sąvoka, nes jos dar nebuvo. Tikimybės (atsitiktinio įvykio galimybės skaitinės išraiškos) sąvoka gimė po pirmųjų statistinių tyrimų. Tai buvo demografiniai tyrimai, anuo metu vadinti "politine aritmetika". Džonas Grauntas (1620-1675) norėjo nustatyti Londono gyventojų amžiaus struktūrą. Surinkęs Londono gyventojų mirčių duomenis (229250 per 20 metų) jis skaičiavo įvairių amžiaus grupių dalį. Pavyzdžiui, vaikų (iki 6 metų) mirčių buvo registruota 71124. Jis pateikė skaičių: santykinį dažnį $\frac{71124}{229250} = \frac{1}{3}$, kuris gali būti panaudotas nustatant kokią dalį Londono gyventojų sudaro tokio amžiaus vaikai. kitas anglų mokslininkas Edmundas Halis (1656-1742) vietoj Londono pasirinko Vokietijos miestą Breslau (dabar Vroclavas). Pasinaudodamas Breslau mirčių registro knygomis, jis galėjo nustatyti populiacijos amžiaus struktūrą ir, pvz., amžių, kurio sulaukti yra lygiai tiek pat šansų, kaip ir mirti nesulaukus (dabar vadiname gyvenimo trukmės mediana). Savo tyrimus Halis naudojo pensijų (rentų) dydžiui nustatyti.

Šveicaras Jakobas Bernulis (1654-1705) jau naudoja įvykio tikimybės sąvoką ir susieja ją su statistiniu dažniu. Pvz. Metame kauliuką N kartų ir suskaičiuojame kiek kartų iškrito šešios akutės. Pavadinkime gautą skaičių M. Atlikę daugybę kauliuko metimo eksperimentų, pamatytume, kad santykis (statistinis šešiukės dažnis) $M/N = 1/6$. Skaičius $1/6$ rodo, kiek šansų turi šešiukė iškristi kiekvieno metimo metu (šešiukės pasirodymo tikimybė). Bernulio nustatytas principas dabar vadinamas didžiųjų skaičių dėsniu (fenomenas atsiskleidžia, kai skaičius N yra pakankamai didelis). Šis dėsnis įvertina tikimybę, kad, atlikus didelį skaičių eksperimentų, stebimo įvykio statistinis dažnis mažai skirsis nuo to įvykio tikimybės.

Iš Bernulio rezultatų išplaukia, kad tikrąją tikimybę nustatyti padeda statistinio dažnio skaičiavimas. Paklaidą, mūsų atveju, $M/N - 1/6$ tyrė De Muavras (1667-1754), Laplasas (1746-1827), Puasonas (1781-1841) ir Gausas (1777-1855). Jie nustatė, kad daugeliu atveju galima stebėti reiškinį, kai paklaida, mūsų atveju skaičiai $(M/N - 1/6)\sqrt{N}$, paklūsta tam tikram visiškai naujos prigimties dėsningumui. Šį dėsningumą vadiname Gauso tikimybiniu skirstiniu, o reiškinį – centrine ribine teorema.

Vystantis mokslams, paaiškėjo, kad tikimybių teorija gali būti taikoma daug svarbesnėse srityse, negu lošimai. Tai – matavimo paklaidų teorija, balistikos, statistikos (pirmiausia demografijos) klausimai. Tikimybinius skirstinius pradėta naudoti aprašant biologijos, kvantų mechanikos, genetikos ir kt. reiškinius. Nuo Halio laikų tikimybės taikomos draudos matematikoje. Tikimybių teorija ir statistikos mokslas gimė kartu ir yra artimiausi mokslai.

1.2 Statistiniai eksperimentai

Tarkime, kad daug kartų atliekame eksperimentą, kurio rezultatų iš anksto negalime numatyti, tačiau galime nusakyti visų baigčių aibę. Toks eksperimentas vadinamas *statistiniu eksperimentu.*

1 pavyzdys. Meskime 6-ių akučių lošimų kauliuką. Šio statistinio eksperimento galimų rezultatų aibė

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\},$$

čia įvykis ω_i reiškia, kad iškrito i akučių.

2 pavyzdys. Mėtykime lošimų kauliuką tol, kol iškris 6 akutės ir rašykime į eilę iškritusių akučių skaičius. Gausime skaičių eiles, pasibaigiančias šešetu, tačiau, gali būti taip, kad šešetas neiškris, o skaičių eilė bus begalinė (eksperimentas niekaip negali pasibaigti). Šio statistinio eksperimento galimų rezultatų aibė Ω yra begalinė, bet skaiti, t.y. tokia, kurios elementus galime sunumeruoti. Ją sudaro baigtiniai arba begaliniai rinkiniai:

$$\Omega = \{\langle\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}, 6\rangle, \langle\omega_1, \ldots\rangle, w_j \in \{1, 2, \ldots, 5\}, m \geq 1\}.$$

3 pavyzdys. Fiksuokime termometro rodmenis. Teoriškai galimų rezultatų aibė yra kontinuumo galios $\Omega = [s, S]$, čia s, S atitinkamai mažiausia ir didžiausia termometro skalės reikšmės (praktiškai apsiribojame sveikomis arba racionaliomis reikšmėmis).

1.3 Klasikinis modelis

Su statistiniu bandymu susiesime jo baigčių aibę Ω. Jos elementus ω_i vadinsime *elementariaisiais įvykiais*. Visus kitus įvykius A, kuriuos nagrinėsime ir kurių elementai yra elementarieji įvykiai, vaizduosime aibės Ω poaibiais.

Pavyzdys. Meskime lošimų kauliuką. Įvykį "iškrito lyginis akučių skaičius" vaizduosime aibe A, sudaryta iš trijų elementariųjų įvykių:

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}.$$

Tarkime, kad

- statistinio eksperimento galimų baigčių aibė yra baigtinė:

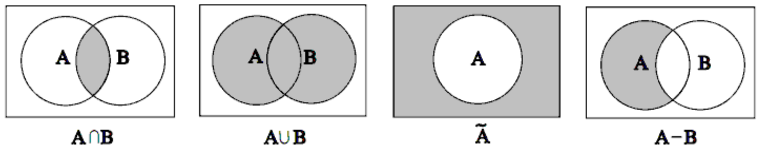
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\},$$

- atlikus eksperimentą visos baigtys yra vienodai galimos.

Atsitiktiniais įvykiais vadinsime baigčių aibės Ω poaibius $A \subset \Omega$. Visų Ω poaibių aibę žymėsime $\mathcal{P}(\Omega)$. Aibių operacijas žymėsime ženklais $\cap, \cup, \setminus$. Pagrindinės įvykių operacijos pavaizduotos 1 pav. Baigtinės aibės A elementų skaičių žymėsime $|A|$. Naudosime šiuos terminus:

- baigtis $\omega \in A$ vadinsime *palankiomis* A.
- Aibę $\emptyset$ vadinsime *negalimu*, aibę Ω – *būtinu* įvykiu.
- Įvykius A ir $\bar{A} = \Omega \setminus A$ vadinsime *priešingais*.
- Jei $A \cap B = \emptyset$, įvykius A ir B vadinsime *nesutaikomais*.

Kuo įvykis turi daugiau palankių jam baigčių, tuo daugiau galimybių šiam įvykiui pasirodyti eksperimento metu. Šia idėja remiasi klasikinis tikimybės apibrėžimas, suformuluotas Girolamo Cardano (1501-1576).



1 pav.: Pagrindinės įvykių operacijos.

Apibrėžimas. *Tikimybe vadinsime funkciją* $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, *apibrėžiama lygybe*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Skaičių $P(A)$ *vadinsime įvykio* $A \subset \Omega$ *tikimybe. Kiekvieno elementariojo įvykio tikimybė*

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Aišku, kad

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

Tačiau bandymai su vienodomis baigtimis yra tikrų bandymų idealizacija. Paprastai elementariųjų įvykių tikimybės nėra vienodos. Galime apibendrinti tikimybės apibrėžimą turėdami galvoje, kad kiekvieną elementarųjį įvykį ω atitinka jo tikimybė $P(\omega)$.

Apibrėžimas. *Tegu* Ω *yra baigtinė arba skaiti aibė,* $\mathcal{P}(\Omega)$ *yra visų jos poaibių sistema,* $P(\omega), \omega \in \Omega$ *yra neneigiamų skaičių aibė, tenkinanti sąlygą*

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

Tikimybe vadinsime funkciją $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, *apibrėžiamą lygybe*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Trejetą $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *vadinsime diskrečiąja tikimybine erdve.*

Teorema. (Tikimybių sudėties taisyklė.) *Tegu* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *yra diskrečioji tikimybinė erdvė. Teisingos lygybės:*
$P(\Omega) = 1; P(\emptyset) = 0$. *Jei* A *ir* B *yra nesutaikomi įvykiai, tai*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

Šią teoremą galima apibendrinti atvejui, kai turime n tarpusavyje nesutaikomų įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{2}$$

Pavyzdys. Iš 36 kortų malkos atsitiktinai traukiamos 3 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp ištrauktų kortų bus tik vienas tūzas?
Elementariųjų įvykių skaičius n yra skaičius būdų sudaryti 3-jų kortų aibę iš 36-ių. Tai derinių skaičius $n = C_{36}^3 = \dfrac{36!}{3! \cdot 33!}$. Įvykis A – "ištrauktų kortų aibėje yra vienas tūzas". Įvykį A išskaidome į nesutaikomus įvykius:
A_1 – "ištrauktų kortų aibėje yra čirvų tūzas";
A_2 – "ištrauktų kortų aibėje yra gilių tūzas";
A_3 – "ištrauktų kortų aibėje yra pikų tūzas";
A_4 – "ištrauktų kortų aibėje yra bubnų tūzas".
$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Apskaičiuosime įvykių $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ tikimybes (jos yra vienodos). Prie jau ištraukto tūzo likusias 2 kortas renkame iš 32-jų kortų rinkinio, gauto atmetus iš 36-ių keturis tūzus. Įvykiams A_i palankių įvykių skaičius yra $|A_i| = C_{32}^2$. Kadangi įvykiai A_i yra poromis nesutaikomi, tai iš formulės (2) gauname:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 4\frac{C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{31 \cdot 16}{35 \cdot 17 \cdot 3} \approx 0,278.$$

1.4 Geometrinė tikimybė

Geometrinių tikimybių uždaviniai nagrinėja statistinius eksperimentus, kurių elementariųjų įvykių aibė nėra nei baigtinė nei skaiti.

Apibrėžimas. *Tegu* $\Omega \in \mathcal{R}^n$, $\mu(\Omega)$ *egzistuoja ir* $\mu(\Omega) < \infty$. *Tegu*

$$\mathcal{A} = \{A : A \subset \Omega, \mu(A) \text{ egzistuoja}\}$$

yra nagrinėjamų atsitiktinių įvykių sistema, o $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *yra funkcija, apibrėžtą lygybe*

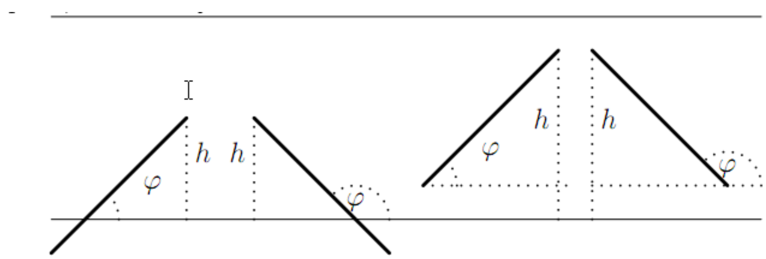
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{3}$$

Trejetą $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *vadinsime geometrine tikimybine erdve.*

Kai $n = 1, \mu(A)$ reiškia geometrinį ilgį, kai $n = 2$ – plotą. Eksperimento baigtys yra Ω taškai ir visos baigtys yra vienodai tikėtinos. Taigi geometrinėje tikimybinėje erdvėje baigtys yra atitinkamos srities taškai, įvykiai – šios srities poaibiai, turintys geometrinį matą, o įvykių tikimybės apibrėžiamos šių geometrinių matų santykiu.

Prancūzo Ž. Biufono 1777 metais paskelbtame darbe išspręstas įžymusis uždavinys apie adatą, kuris davė pradžią geometriniam tikimybių skaičiavimui.

Pavyzdys. Biufono uždavinys. Plokštumoje nubrėžiame lygiagrečias tieses, taip, kad atstumas tarp gretimų tiesių būtų lygus a. Adatą, kurios ilgis l ($l < a$) metame ant šios plokštumos. Laikome, kad adatos vieta ir orientacija yra atsitiktinės. Kokia tikimybė, kad adata kirs kurią nors tiesę?
Pažymėkime raide h adatos viršutinio galo atstumą iki artimiausios iš apačios lygiagretės, raide φ – kampą tarp adatos ir tos lygiagretės. Adatos padėtį tiesių atžvilgiu nusako skaičių (h, φ) pora (žr. 2 pav.).



2 pav.: Biufono uždavinys.

Todėl šio eksperimento baigtimi (elementariuoju įvykiu) galime laikyti stačiakampio taškus

$$\Omega = \{(h, \varphi) : 0 \leq h \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$

o mus dominantis įvykis

$$A = \{\text{adata kerta tiesę}\} = \{(h, \varphi) : (h, \varphi) \subset \Omega, h \leq l \sin \varphi\}.$$

Pasinaudosime formule (3) įvykio A tikimybei apskaičiuoti. Stačiakampės srities Ω plotas $\mu(\Omega) = \pi a$. Apskaičiuosime $\mu(A)$:

$$\mu(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = 2l.$$

Taigi

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2l}{\pi a}.$$

Biufono uždavinys yra atėjęs iš tų laikų, kai skaičius π buvo aktyvių tyrimų objektas. Galime tikėtis, kad pakartoję daugelį kartų (N kartų) eksperimentą su adata ir paskaičiavę baigtis, kuomet adata kerta kurią nors tiesę, gauto tokių baigčių skaičiaus M ir visų eksperimentų skaičiaus N santykis M/N būtų artimas įvykio A tikimybei. Tuomet apytikslai galima apskaičiuoti ir skaičių π.

Pavyzdys. Turime virvę, kurią kerpame į dvi dalis. Kirpimo taškas parenkamas atsitiktinai ir visi taškai turi vienodas galimybes būti kirpimo taškais. Kokia tikimybė, kad vienas virvės galas bus daugiau nei dvigubai trumpesnis už kitą?

Mus domina įvykio $A =$"vienas virvės galas daugiau nei dvigubai trumpesnis už kitą" tikimybė. Elementariųjų įvykių (kirpimo taškų) aibę patogu atvaizduoti intevalu $\Omega = [a, d]$. Pažymėkime taškus b, c, kurie dalija virvę į tris lygias dalis $a - - - - - b - - - - - - c - - - - - - d$. Elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, aibę atitinka intervalų junginys $[a, b] \cup [c, d] \in \Omega$. Ši aibė sudaro 2/3 visų elementariųjų įvykių aibės. Taigi $P(A) = 2/3$.

Pavyzdys. Tarkime, tiriame telefoninių pokalbių trukmę. Apsiribosime pokalbiais, trunkančiais ne ilgiau, nei 40 minučių. Atsitiktinai pasirenkame telefoninį pokalbį, kurio trukmė pakliūva į intervalą $(0, 40)$. Statistinio eksperimento rezultatą, t.y., atsitiktinai pasirinkto pokalbio trukmės ilgį, galime vaizduoti atkarpos $\Omega = (0, 40)$ tašku. Aišku, kad didžioji dauguma tokių pokalbių neviršys 5 ar 10 minučių. Todėl labiau tikėtina, kad pokalbio trukmė (elementarusis įvykis) paklius į atkarpos dalį $(1, 10)$, nei į atkarpos dalį $(30, 40)$. Šiam statistiniam eksperimentui geometrinių tikimybių modelio taikyti negalime, nes įvykio tikimybė nėra proporcinga jį atitinkančios atkarpos A dalies ilgiui.

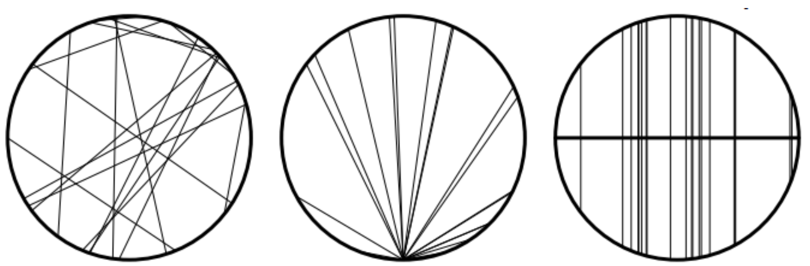
Pavyzdys. Bertrano paradoksas. Lygiakraštis trikampis (arba trikampis, kurio visos kraštinės yra lygios) yra įbrėžtas į apskritimą. Tarkime, kad yra atsitiktinai parenkama apskritimo styga. Kokia yra tikimybė, kad ta atsitiktinai parinkta styga yra ilgesnė už įbrėžto trikampio kraštinę?

Atsitiktinį stygos parinkimą galime apibrėžti įvairiai. Pasirodo, nuo atsitiktinumo sąvokos interpretacijos priklauso šio uždavinio atsakymas.

1. Vienetinio skritulio viduje atsitiktinai pasirenkame tašką ir imame stygą, einančią per šį tašką statmenai spinduliui, nubrėžtam per tą patį tašką. Šiuo atveju Ω yra vienetinis skritulys.

2. Fiksuokime apskritimo tašką P, nubrėžkime apskritimo liestinę tame taške ir nagrinėkime stygas, einančias per tašką P. Styga pasirenkama atsitiktinai pasirenkant stygos ir liestinės kampą. Šiuo atveju $\Omega = [0, \pi]$.

3. Fiksuojame vienetinio apskritimo skersmenį ir atsitiktinai parenkame skersmens tašką. Nagrinėjame stygą, kuri statmena skersmeniui šiame taške. Šiuo atveju $\Omega = [-1, 1]$.



3 pav.: Bertrano uždavinys.

Atsakymai trim atvejais yra skirtingi – 1/4, 1/3 ir 1/2.