10 Paskaita. Atsitiktinių dydžių nepriklausomumas

10.1 Vektorių komponenčių skirstiniai

Tegu $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) : \Omega \to \mathcal{R}^m$ – absoliučiai tolydusis atsitiktinis vektorius, p_ξ – jo tankis, $B \in \mathcal{B}^m$ yra bet kokia Borelio aibė. Tada iš tankio finkcijos savybių išplaukia

$$P(X \in B) = \int_B p_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_m) du_1 du_2 \ldots du_m.$$

Imkime $B = (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \ldots \times (-\infty, x_{m-1}) \times \mathcal{R}$. Tada $P(X \in B) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_{m-1} < x_{m-1}) = F_{\xi'}(x_1, \ldots, x_{m-1})$, čia $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$. Toliau suformuluosime teoremą, leisiančią apskaičiuoti "trumpesnio" atsitiktinio vektoriaus tankį iš "ilgesnio" vektoriaus tankio.

Teorema. *Jei absoliučiai tolydaus atsitiktinio vektoriaus* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ *tankis yra* $p_\xi(u_1, \ldots, u_m)$*, tai atsitiktinis vektorius* $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$ *taip pat yra absoliučiai tolydus ir jo tankis yra*

$$p_{\xi'}(u_1, \ldots, u_{m-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u_1, \ldots, u_m) du_m.$$

Suprantama, kad norėdami gauti kitų "trumpesnių" atsitiktinių vektorių tankius, turime "ilgojo" vektoriaus tankį suintegruoti pagal tam tikras ("nereikalingas") komponentes.

Pavyzdys. Atsitiktinis vektorius $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ įgyja reikšmes iš aibės (trikampio)

$$\Delta = \{(u_1, u_2) : u_1, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 4\}$$

ir visos reikšmės yra vienodai galimos. Raskime tankius $p_\xi(u_1, u_2)$ ir $p_{\xi_1}(u)$.

Kadangi atsitiktinis vektorius $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ įgyja visas galimas reikšmes su vienodomis tikimybėmis, vektorius turi tolygųjį skirstinį plokštumos trikampyje Δ. Todėl

$$p_\xi(u_1, u_2) = \begin{cases} c, & \text{jei } (u_1, u_2) \in \Delta, \\ 0, & \text{jei } (u_1, u_2) \notin \Delta, \end{cases}$$

Konstantą c rasime iš tankio funkcijos savybės

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u_1, u_2) du_1 du_2 = 1.$$

Iš čia

$$c = \frac{1}{S_\Delta},$$

čia S_Δ yra trikampio Δ plotas, kuris lygus 8. Todėl $c = 1/8$. Taigi

$$p_\xi(u_1, u_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}, & \text{jei } (u_1, u_2) \in \Delta, \\ 0, & \text{jei } (u_1, u_2) \notin \Delta, \end{cases}$$

Atsitiktinio dydžio ξ_1 tankis lygus

$$p_{\xi_1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(u, u_2) du_2.$$

Kai $u < 0$ arba $u > 4$, $p_{\xi_1}(u) = 0$. Kai $0 < u < 4$,

$$p_{\xi_1}(u) = \int_0^{4-u} \frac{1}{8} du_2 = \frac{1}{8}(4 - u).$$

Taigi

$$p_{\xi_1}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}(4 - u), & \text{jei } u \in [0, 4], \\ 0, & \text{jei } u \notin [0, 4]. \end{cases}$$

10.2 Atsitiktinio dydžio funkcijos skirstinys

Žinome, kad Borelio funkcija nuo atsitiktinio dydžio yra taip pat atsitiktinis dydis. Kaip randamas tokio atsitiktinio dydžio skirstinys?

Pavyzdys. Tegu ξ yra atsitiktinis dydis, tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 1]$. Raskime atsitiktinio dydžio $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ tankio funkciją.

Pirmiausia apskaičiuosime pasiskirstymo funkciją $F_\eta(x)$:

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\left(\frac{1}{\xi} < x\right) = P\left(\xi > \frac{1}{x}\right) = \int_{[0,1] \cap \left(\frac{1}{x}, \infty\right)} du.$$

Kai $x < 1$, aibė, pagal kurią integruojame yra tuščia, todėl integralas lygus nuliui. Kai $x \geq 1$, integralas lygus $1 - \frac{1}{x}$. Taigi

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & \text{jei } x \geq 1, \\ 0, & \text{jei } x < 1, \end{cases} \quad p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{jei } x \geq 1, \\ 0, & \text{jei } x < 1, \end{cases}$$

Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

Apibrėžimas. *Atsitiktinius dydžius ξ_1, ξ_2 vadinsime nepriklausomais, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis B_1, B_2 įvykiai $\{w : \xi_1(w) \in B_1\}$, $\{w : \xi_2(w) \in B_2\}$ yra nepriklausomi, t.y.*

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2).$$

Apibrėžimas. *Atsitiktinius vektorius* $\xi_1, \xi_2 : \Omega \to \mathcal{R}^n$ *vadinsime nepriklausomais, jei su bet kokiomis Borelio aibėmis* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^n)$

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2).$$

Dviejų įvykių nepriklausomumas reiškia, kad žinodami, kad vienas iš įvykių įvyko, negauname jokios papildomos informacijos apie tai, ar įvyko antrasis įvykis. Panašiai samprotaujame kalbėdami apie du nepriklausomus atsitiktinius dydžius ar vektorius. Tačiau norėdami apibrėžti nepriklausomų atsitiktinių dydžių sistemą nepakanka pareikalauti, kad jie būtų poromis nepriklausomi.

Apibrėžimas. *Tegu* $\xi_\lambda : \Omega \to \mathcal{R}^n, (\lambda \in \Lambda)$ *atsitiktinių vektorių sistema. Jei bet kokiam atsitiktinių vektorių* $\xi_{\lambda_1}, \ldots \xi_{\lambda_m}, (m \geq 2)$ *ir Borelio aibių* $B_1, B_2, \ldots, B_m$ *rinkiniui teisinga lygybė*

$$P(\xi_{\lambda_1} \in B_1, \ldots, \xi_{\lambda_m} \in B_m) = P(\xi_{\lambda_1} \in B_1) \ldots P(\xi_{\lambda_m} \in B_m),$$

tai sistemą sudaro nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai.

Tačiau toks tikrinimas yra labai komplikuotas. Praktiškai atsitiktinių dydžių ir jų sistemų nepriklausomumui tikrinti naudojamos pasiskirstymo, tankio funkcijos ir reikšmių įgyjimo tikimybės.

Teorema. *Atsitiktiniai dydžiai* $\xi, \eta : \Omega \to \mathcal{R}$ *yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai*

$$P(\xi < u, \eta < v) = P(\xi < u)P(\eta < v).$$

Šį teiginį galime performuluoti kitaip

Teorema. *Atsitiktiniai dydžiai* $\xi, \eta : \Omega \to \mathcal{R}$ *yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai atsitiktinio vektoriaus* $\zeta = (\xi, \eta)$ *pasiskirstymo funkcija reiškiama taip:*

$$F_\zeta(u, v) = F_\xi(u)F_\eta(v).$$

Teorema. *Diskretieji atsitiktiniai dydžiai* $\xi, \eta : \Omega \to \mathcal{R}$ *yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai su bet kokiais* x, y

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y).$$

Jeigu atsitiktiniai dydžiai yra absoliučiai tolydieji, tai jų nepriklausomumą galime suformuluoti pasinaudoję tankio funkcijomis.

Teorema. *Jei* $\xi, \eta : \Omega \to \mathcal{R}$ *yra absoliučiai tolydieji ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tankius* p_ξ, p_η*, tai atsitiktinis vektorius* $\zeta = (\xi, \eta)$ *taip pat yra absoliučiai tolydus ir*

$$p_\zeta(u_1, u_2) = p_\xi(u_1)p_\eta(u_2).$$

Panašiai apibrėžiamas atsitiktinių vektorių nepriklausomumas. Jei X yra atsitiktinis dydis, tai ir $X^2, X^3, \sin(X), |X|$ yra atsitiktiniai dydžiai. Apskritai, su bet kokia Borelio funkcija f dydis $f(X)$ irgi atsitiktinis. Pritaikę Borelio funkcijas dviems nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams vėl gausime nepriklausomų dydžių porą.

Teorema. *Jei $\xi_1, \xi_2 : \Omega \to \mathcal{R}^n$ nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai, o $f_1, f_2 : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ yra dvi Borelio funkcijos, tai atsitiktiniai vektoriai $\eta_1 = f_1(\xi_1), \eta_2 = f_2(\xi_2)$ yra taip pat nepriklausomi.*

O ar bus nepriklausomi dviejų atsitiktinių dydžių suma ir skirtumas?

Pavyzdys. Metami du simetriški lošimo kauliukai, X_1 – akučių skaičius, atvirtęs ant pirmojo, X_2 – ant antrojo kauliuko. Ir be jokių tikrinimų galime daryti išvadą, kad dydžiai X_1, X_2 yra nepriklausomi. Tegu $X = X_1 + X_2$, $Y = X_1 - X_2$. Ar dydžiai X, Y priklausomi?

Kad įrodytume, jog dydžiai priklausomi, pakanka surasti bent vieną skaičių porą x, y, su kuria lygybė $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ yra neteisinga. Imkime, pavyzdžiui, $x = 12, y = 0$. Gausime

$$P(X = 12) = 1/36, \quad P(Y = 0) = 1/6, \quad P(X = 12, Y = 0) = 1/36.$$

Taigi $P(X = x, Y = y) \neq P(X = x)P(Y = y)$ ir dydžiai yra priklausomi. Jeigu tektų įrodinėti, kad du diskretieji dydžiai yra nepriklausomi, tai darbo būtų žymiai daugiau – reiktų įrodyti, kad su visomis x, y reikšmėmis apibrėžimo lygybės yra teisingos.

Pavyzdys. Balti ir juodi rutuliai

Urnoje yra du balti ir du juodi rutuliai. Balti rutuliai pažymėti skaičiais 0, 1. Tokiais pat skaičiais pažymėti juodieji rutuliai. Iš eilės su grąžinimu traukiami du rutuliai. Pažymėkime X – baltų rutulių skaičių, o Y – skaičių, užrašytų ant ištrauktųjų rutulių sumą. Ar dydžiai X ir Y yra nepriklausomi? Kiek pasvarstę, tikriausiai pamanysime, kad tai tiesa. Tačiau tai reikia matematiškai įrodyti, t. y. reikia įsitikinti, kad su visomis reikšmėmis x, y teisingos lygybės

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Visas tikimybes $P(X = x, Y = y)$ surašysime į lentelę. Jas skaičiuoti galime taip. Pažymėkime baltuosius rutulius B_0, B_1, čia B_i žymi baltą rutulį, ant kurio užrašytas skaičius i. Juoduosius rutulius pažymėkime J_0, J_1. Traukiame du rutulius su grąžinimu, taigi iš viso yra $4^2 = 16$ baigčių. Išrašykime įvykiui $\{X = 1, Y = 1\}$ palankias baigtis:

$$B_0J_1, B_1J_0, J_0B_1, J_1B_0 \text{ taigi } P(X = 1, Y = 1) = 4/16.$$

Panašiai apskaičiuosime ir kitas tikimybes. Surašę tikimybes į lentelės langelius, susumuokime skaičius, surašytus eilutėse ir stulpeliuose:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	
$Y = 0$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$Y = 1$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{2}$
$Y = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

Ką reiškia, pavyzdžiui, skaičius, kurį gavome susumavę pirmojo stulpelio skaičius? Šis skaičius yra tikimybių suma:

$$P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)=P(X=0).$$

Taigi paskutinėje eilutėje surašytos atsitiktinio dydžio X reikšmių tikimybės. O paskutiniame stulpelyje – atitinkamų dydžio Y reikšmių tikimybės (atsitiktinio vektoriaus (X,Y) marginaliųjų dydžių X ir Y tikimybės). Tikrinant, ar dydžiai yra nepriklausomi, reikia kiekvienam lentelės langeliui patikrinti, ar jame įrašyta reikšmė lygi šio langelio eilutės paskutiniojo ir šio langelio stulpelio apatiniojo skaičių sandaugai. Pavyzdžiui,

$$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Šiuo atveju matome, kad visiems langeliams lygybės yra teisingos ir dydžiai yra nepriklausomi.

10.3 Nepriklausomų diskrečiųjų dydžių suma

Dažnai tenka nagrinėti dviejų ar daugiau nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumą. Pavyzdžiui, dalyvavus dviejose loterijose natūralu suvesti abiejų laimėjimų arba pralaimėjimų balansą. Pavyzdžiui, binominį atsitiktinį dydį $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ reiškiame Bernulio atsitiktinių dydžių X_i suma:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

čia $X_i=1$, jei i-me bandyme pasirodė sėkmė, $X_i=0$, jei buvo nesėkmė, o p yra sėkmės tikimybė kiekviename bandyme. Šie dydžiai susiję su nepriklausomais bandymais, taigi ir patys yra nepriklausomi. Dviejų atsitiktinių dydžių suma taip pat yra atsitiktinis dydis. Kaip jo skirstinys priklauso nuo dėmenų skirstinių?

Teorema. *Jei ξ,η yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\zeta=\xi+\eta$, tai*

$$P(\zeta=z)=\sum_{x,y:x+y=z}P(\xi=x)P(\eta=y).$$

Atsakysime į klausimą apie nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos skirstinį, kai dėmenys yra tolydieji atsitiktiniai dydžiai.

Teorema. *Jei ξ_1,ξ_2 yra absoliučiai tolydieji nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tankius p_{ξ_1},p_{ξ_2}, tai atsitiktinis dydis $\eta=\xi_1+\xi_2$ yra taip pat absoliučiai tolydusis ir jo tankis lygus*

$$p_{\xi_1+\xi_2}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1}(v)p_{\xi_2}(u-v)dv=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_2}(v)p_{\xi_1}(u-v)dv.$$