5 Paskaita. Parametrinių hipotezių tikrinimas vienai imčiai.

5.1 Hipotezė apie normaliojo skirstinio vidurkio lygybę skaičiui, kai dispersija nežinoma

Tarkime, kad stebime normalųjį atsitiktinį dydį $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ir tarkime, kad μ ir σ^2 nežinomi. Norime patikrinti hipotezę $H_0 : \mu = a$, čia a – fiksuotas skaičius. Kritinė sritis sudaroma remiantis tuo, kad statistika $T = \dfrac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{S_1}$ turi Stjudento skirstinį su $n-1$ laisvės laipsniais, jei hipotezė H_0 yra teisinga. Stjudento skirstinio tankio funkcija yra simetriška ašies OY atžvilgiu, todėl kritinės sritys priklausomai nuo alternatyvų yra pateiktos lentelėje 1. t yra statistikos T realizacija, $t_{\alpha/2}(n-1)$ yra Stjudento skirstinio su $n-1$ laisvės laipsniais $\alpha/2$ lygmens kritinė reikšmė.

1 lentelė: Alternatyvos ir kritinės sritys, kai $H_0 : \mu = a$

Alternatyva H_1	H_0 atmetama	H_0 neatmetama
$\mu \neq a$	$\lvert t\rvert > t_{\alpha/2}(n-1)$	$\lvert t\rvert \leq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu > a$	$t > t_\alpha(n-1)$	$t \leq t_\alpha(n-1)$
$\mu < a$	$t < -t_\alpha(n-1)$	$t \geq -t_\alpha(n-1)$

Pavyzdys. Patikrinus 16 atsitiktinai parinktų auditorijos studentų sistolinį kraujo spaudimą, gauti tokie rezultatai: $\bar{X} = 118,2, S_1 = 3,6$. Esant reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0,05$ patikrinkite hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 120, \\ H_1 : \mu \neq 120. \end{cases}$$

Laikome, kad sistolinis kraujo spaudimas turi normalųjį skirstinį.

Sprendimas. Skaičiuojame kriterijaus statistikos realizaciją:

$$t = \frac{(118,2 - 120)\sqrt{16}}{3,6} = -2, t_{0,025}(15) = 2,131.$$

Kritinė sritis: $W = (-\infty, -2,131) \cup (2,131, \infty)$. Kadangi $t \notin W$, tai H_0 neatmetama. Sakome, kad skirtumas tarp empirinio vidurkio 118,2 ir hipotetinio vidurkio 120 nėra reikšmingas, esant reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0,05$.

Patikrinkime hipotezę su vienpuse alternatyva:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 120, \\ H_1 : \mu < 120. \end{cases}$$

$t_{0,05}(15) = 1,753$. Šiuo atveju $W = (-\infty, -1,753), t = -2 \in W$. Taigi hipotezė H_0 atmetama alternatyvos $\mu < 120$ naudai. Sakome, kad skirtumas tarp empirinio vidurkio ir 120 yra reikšmingas.

5.2 Ryšys tarp hipotezių tikrinimo ir pasikliautinųjų intervalų

Yra glaudus ryšys tarp pasikliautinųjų intervalų ir hipotezių tikrinimo. Jei tikrinant hipotezę su reikšmingumo lygmeniu α nulinė hipotezė atmetama, vidurkio pasikliautinasis intervalas, naudojant tą patį reikšmingumo lygmenį, neapims hipotetinės parametro reikšmės. Analogiškai, kai nulinė hipotezė neatmetama, hipotetinė reikšmė pateks į pasikliautinąjį intervalą, apskaičiuotą naudojant tą patį reikšmingumo lygmenį.

Žemiau esantis pavyzdys demonstruoja šį ryšį, kai hipotezė tikrinama su dvipuse alternatyva.

Pavyzdys. Cukrus supakuotas į 5 svarų maišus. Inspektorius įtaria, kad maišeliuose gali nebūti 5 svarų. 50 maišelių imties vidurkis yra 4,6 svarų ir standartinis nuokrypis - 0,7 svaro. Ar tai leidžia daryti išvadą, kad maišelių vidurkis mažesnis už 5 svarus esant reikšmingumo lygmeniui 0,05? Taip pat raskite teorinės vidurkio reikšmės 95% pasikliautinąjį intervalą.

Sprendimas. Patikrinkime hipotezę su dvipuse alternatyva:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5, \\ H_1 : \mu \neq 5. \end{cases}$$

$$t = \frac{(4,6-5)\sqrt{50}}{0,7} = -4,04, t_{0,025}(49) = 2,01.$$

Šiuo atveju kritinė sritis $W = (-\infty, -2,01) \cup (2,01; \infty), t = -4,04 \in W$. Taigi hipotezė H_0 atmetama alternatyvos $\mu \neq 5$ naudai. Skirtumas tarp empirinio vidurkio ir hipotetinės reikšmės 5 yra reikšmingas ir sudaro pagrindą atmesti nulinę hipotezę.

Vidurkio pasikliautinojo intervalo formulė:

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Taigi

$$4,6 - 2,01\frac{0,7}{\sqrt{50}} < \mu < 4,6 - 2,01\frac{0,7}{\sqrt{50}}.$$

Gauname $4,4 < \mu < 4,8$. Hipotetinė vidurkio reikšmė 5 nepateko į šį pasikliautinąjį intervalą. Tai patvirtina išvadą, kurią gavome tikrindami statistinę hipotezę.

1 pav. parodyta, kaip patikrinti hipotezę apie vidurkio lygybę skaičiui programos R pagalba. Tikrinama nulinė hipotezė $H_0 : \mu = 10$ su dvipuse alternatyva, tuo pačiu apskaičiuojamas 95% vidurkio pasikliautinasis intervalas. Gauta $p-$reikšmė lyginama su reikšmingumo lygmeniu α. Jei, pavyzdžiui, $\alpha = 0,05$

ir gauta $p-$reikšmė didesnė už 0,05, nulinė hipotezė neatmetama. Šiuo atveju taip ir yra: $0,7096 > 0,05$. Reikšmė 10 patenka į pasikliautinąjį intervalą, kas taip pat patvirtina nulinę hipotezę.

```
> df<- seq(1,20,by=1)
> df
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
> mean(df)
[1] 10.5
> sd(df)
[1] 5.91608
> t.test(df,alternative="two.sided",mu=10,conf.int = 0.95)

        One Sample t-test

data:  df
t = 0.37796, df = 19, p-value = 0.7096
alternative hypothesis: true mean is not equal to 10
95 percent confidence interval:
  7.731189 13.268811
sample estimates:
mean of x
     10.5
```

1 pav.: Normaliojo skirstinio vidurkio lygybės skaičiui tikrinimas R.

5.3 Hipotezė apie dispersijos lygybę skaičiui, kai vidurkis žinomas.

Dispersija dažnai yra gaminių kokybės rodiklis, todėl yra svarbu, kad ji neviršytų normatyvinių dydžių. Dispersija yra svarbi, parenkant stabilios kainos vertybinius popierius, nustatant laiko, per kurį atvyksta gelbėjimo tarnybos, paklaidos dydį. Tarkime, kad stebime normalųjį atsitiktinį dydį $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$, populiacijos vidurkis μ_0 yra žinomas, dispersija σ^2 – nežinoma. Tikrinsime hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = a, \\ H_1 : \sigma^2 \neq a, \end{cases}$$

čia a – fiksuotas skaičius. Jei hipotezė H_0 yra teisinga, tai statistika

$$T = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2$$

turi χ^2 skirstinį su n laisvės laipsniais. χ^2 skirstinys nėra simetriškas. Kritinės sritys parodytos 2 lentelėje.

Čia $\chi^2_\alpha(n)$ yra Chi kvadratu skirstinio su n laisvės laipsniais α lygmens kritinė reikšmė.

Pavyzdys. Standartiniu testu gauti 10 studentų IQ koeficientai: $95, 120, 102, 87, 94, 115, 109, 98, 77, 103$. Žinoma, kad studentų IQ vidurkis $\mu_0 = 100$. Patikrinkite hipotezę, kad esant reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0,05$, ši grupė sudaryta iš populiacijos, kurios dispersija $\sigma^2 = 900$, atstovų.

2 lentelė: Alternatyvos ir kritinės sritys, kai $H_0 : \sigma^2 = a$

Alternatyva H_1	W
$\sigma^2 \neq a$	$W = (0; \chi^2_{1-\alpha/2}(n)) \cup (\chi^2_{\alpha/2}(n); \infty)$
$\sigma^2 < a$	$W = (0; \chi^2_{1-\alpha}(n))$
$\sigma^2 > a$	$W = (\chi^2_{\alpha}(n); \infty)$

Sprendimas. Tikriname hipotezę

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 900, \\ H_1 : \sigma^2 \neq 900. \end{cases}$$

$\alpha/2 = 0,025, 1 - \alpha/2 = 0,975, \chi^2_{0,975}(10) = 3,247, \chi^2_{0,025}(10) = 20,48.$

$$T = \frac{1}{900}((95 - 100)^2 + (120 - 100)^2 + \ldots + (103 - 100)^2) = \frac{1482}{900} \approx 1,64.$$

$$W = (0; 3,247) \cup (20,48; \infty), \quad t = 1,64 \in W.$$

Darome išvadą, kad nulinė hipotezė turi būti atmesta.

5.4 Hipotezė apie dispersijos lygybę skaičiui, kai vidurkis nežinomas.

Tarkime, kad stebime normalųjį atsitiktinį dydį $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, populiacijos vidurkis μ ir dispersija σ^2 yra nežinomi. Tikrinsime hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = a, \\ H_1 : \sigma^2 \neq a, \end{cases}$$

čia a – fiksuotas skaičius. Jei hipotezė H_0 yra teisinga, tai statistika

$$T = \frac{n-1}{a} S_1^2$$

turi χ^2 skirstinį su $n - 1$ laisvės laipsniais. Kritinės sritys bus tokio pavidalo:

3 lentelė: Alternatyvos ir kritinės sritys, kai $H_0 : \sigma^2 = a$

Alternatyva H_1	W
$\sigma^2 \neq a$	$W = (0; \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)) \cup (\chi^2_{\alpha/2}(n-1); \infty)$
$\sigma^2 < a$	$W = (0; \chi^2_{1-\alpha}(n-1))$
$\sigma^2 > a$	$W = (\chi^2_{\alpha}(n-1); \infty)$

Čia $\chi^2_\alpha(n-1)$ yra Chi kvadratu skirstinio su $n-1$ laisvės laipsniais α lygmens kritinė reikšmė.

Pavyzdys. Firma, gaminanti svarstykles, teigia, kad svarstyklių parodymų paklaidų standartinis nuokrypis σ neviršija 3 gramų. Ištyrus 26 svarstykles buvo rasta, kad svarstyklių paklaidų empirinis standartinis nuokrypis s_1 lygus 4 gr. Ar galime teigti, kad firmos teiginys nepagrįstas? Imkime $\alpha = 0,05$.

Sprendimas. Tikrinkime hipotezę su vienpuse alternatyva:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 9, \\ H_1 : \sigma^2 > 9. \end{cases}$$

$T = \dfrac{n-1}{a} S_1^2 = \dfrac{25}{9} \cdot 16 = 44,44, \chi^2_{0,05}(25) = 37,65, W = (37,65; \infty).$
Kadangi $44,44 \in W$, H_0 atmetama. Galime sakyti, kad skirtumas tarp empirinės dispersijos 16 ir hipotetinės dispersijos reikšmės 9 yra statistiškai reikšmingas, esant reikšmingumo lygmeniui $\alpha = 0,05$.

2 pav. parodyta, kaip patikrinti hipotezę apie dispersijos lygybę skaičiui programos R pagalba. Tikrinama nulinė hipotezė $H_0 : \sigma^2 = 20$ su dvipuse alternatyva, tuo pačiu apskaičiuojamas 95% dispersijos pasikliautinasis intervalas. Gauta $p-$reikšmė lyginama su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0,05$. Gauta $p-$reikšmė 0,04498 mažesnė už 0,05, nulinė hipotezė atmetama. Reikšmė 20 nepatenka į pasikliautinąjį intervalą, kas taip pat patvirtina alternatyvą. Prieš vykdant komandą **varTest** reikia įdiegti (install.packages("EnvStats")) ir pakrauti (library(EnvStats)) paketą **EnvStats**. 3 pav. parodyta, kaip patikrinti hipotezę $H_0 : \sigma^2 = 20$ su vienpuse alternatyva $H_0 : \sigma^2 > 20$. Gauta $p-$reikšmė 0,0225 mažesnė už 0,05, nulinė hipotezė atmetama alternatyvos naudai.

```
> varTest(df, alternative = "two.sided", conf.level = 0.95,sigma.squared = 20)

Results of Hypothesis Test
--------------------------

Null Hypothesis:                 variance = 20

Alternative Hypothesis:          True variance is not equal to 20

Test Name:                       Chi-Squared Test on Variance

Estimated Parameter(s):          variance = 35

Data:                            df

Test Statistic:                  Chi-Squared = 33.25

Test Statistic Parameter:        df = 19

P-value:                         0.04498324

95% Confidence Interval:         LCL = 20.24210
                                 UCL = 74.66443
```

2 pav.: Normaliojo skirstinio dispersijos lygybės skaičiui tikrinimas R. Dvipusė alternatyva.

```
> varTest(df, alternative = "greater", conf.level = 0.95,sigma.squared = 20)

Results of Hypothesis Test
--------------------------

Null Hypothesis:                 variance = 20

Alternative Hypothesis:          True variance is greater than 20

Test Name:                       Chi-Squared Test on Variance

Estimated Parameter(s):          variance = 35

Data:                            df

Test Statistic:                  Chi-Squared = 33.25

Test Statistic Parameter:        df = 19

P-value:                         0.02249162

95% Confidence Interval:         LCL = 22.06112
                                 UCL =      Inf
```

3 pav.: Normaliojo skirstinio dispersijos lygybės skaičiui tikrinimas R. Vienpusė alternatyva.