3 Paskaita. Pasikliautinieji intervalai.

3.1 Pasikliautinojo intervalo sąvoka

Jei turime "gerą" parametro θ taškinį įvertį $\hat{\theta}(X)$ ir imties realizaciją $x = (x_1, \ldots, x_n)$, galime laikyti, kad $\theta \approx \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$. Tačiau, taškiniai įverčiai, kad ir kokie geri jie bebūtų, turi savo trūkumų, nes $\hat{\theta}(X)$ yra atsitiktinis dydis, o jo reikšmės yra išsibarsčiusios apie θ. Jei atsitiktinis dydis yra tolydusis, tai tikimybė, kad taškinis įvertis sutaps su θ yra lygi nuliui. Tarkime, turime rasti ne tiksią nežinomo parametro θ reikšmę, bet tik intervalą, kuriam su tam tikra tikimybe priklauso vertinamasis parametras θ. Jei ši tikimybė yra arti 1, tai galime laikyti, kad parametras yra šioje srityje.

Sakykime, reikia įvertinti nežinomą parametrą θ. Imkime dvi statistikas $\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) < \hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)$. Pažymėkime

$$Q = P\left(\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)\right).$$

Jei Q mažai skiriasi nuo 1, tai galime laikyti, kad praktiškai

$$\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2.$$

Intervalas $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ vadinamas parametro θ *pasikliautinuoju intervalu* su *pasikliovimo lygmeniu* Q. Šias sąvokas 1937 m. pasiūlė J. Neimanas.

Klaidos tikimybė lygi $1 - Q$. Paprastai Q parenkamas 0,9, 0,95 arba 0,99. Pasikliautinojo intervalo rėžiai yra statistikos (atsitiktiniai dydžiai). Turėdami konkrečią imties realizaciją, gausime pasikliautinojo intervalo realizaciją – 2 skaičius, sudarančius intervalo galus.

Pasikliovimo lygmuo 0,9 reiškia, kad daug kartų sudarant konkrečius pasikliautinuosius intervalus, parametras priklausys maždaug 90% visų intervalų. Intervalui konstruoti naudojami 3 tarpusavyje susiję dydžiai: $n, Q, \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$. Kuo didesnis pasikliovimo lygmuo Q, t.y. garantija, kad θ priklausys intervalui, tuo didesnis intervalo ilgis $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$. Mažindami $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$, tuo pačiu mažinsime ir garantiją Q. Mažinti pasikliautinųjų intervalų ilgius galime didindami imties elementų skaičių n.

3.2 Normaliojo skirstinio vidurkio pasikliautinasis intervalas

Sudarysime normaliojo skirstinio $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ parametrų pasikliautinuosius intervalus (PI). Teks skirti atvejus, kai vienas iš parametrų yra žinomas, o kitas – nežinomas, ir kai abu parametrai nežinomi.

1. Tarkime, kad žinomas σ^2, o nežinomas μ. Matėme, kad $\bar{X}$ yra nepaslinktasis efektyvusis μ įvertis. Juo ir remsimės, sudarydami μ pasikliautinąjį intervalą. Galima tikėtis, kad statistikos $\bar{X}$ pagrindu duotai imčiai sudarytas

PI bus trumpiausias. Žinoma, kad, jei $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi, normaliai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$, tai jų suma $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$, t.y.

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Tegu Q yra pasikliovimo lygmuo. Pažymėkime $\alpha = \dfrac{1-Q}{2}$. Pažymėkime z_α standartinio normaliojo skirstinio $1-\alpha$ lygmens kvantilį (α lygmens kritinę reikšmę). $1-\alpha$ lygmens kvantilis yra toks skaičius z_α, kuris tenkina sąlygą $P(X < z_\alpha) = \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$. Kadangi standartinis normalusis skirstinys yra simetriškas 0 atžvilgiu,

$$P\left(-z_\alpha < \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < z_\alpha\right) = 1 - 2\alpha = Q.$$

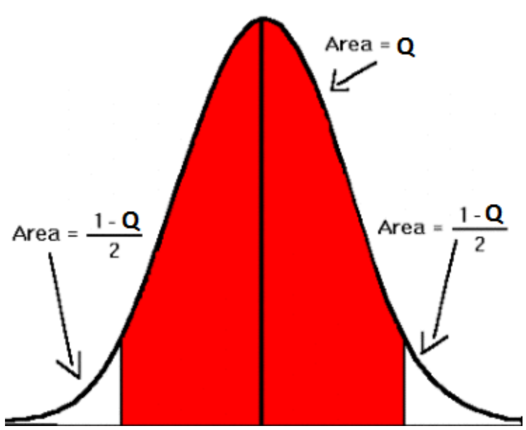
arba

$$P\left(\bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = Q.$$

Iš pasikliautinojo intervalo apibrėžimo turime:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \hat{\mu}_2 = \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

z_α reikšmės randamos iš standartinio normaliojo skirstinio kritinių reikšmių lentelių.



1 pav.: Normaliojo skirstinio kritinės reikšmės.

Pavyzdys. Rasti atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(\mu, 3^2)$ vidurkio pasikliautinąjį intervalą, jei $Q = 0,99, n = 16, \bar{X} = 10,2$.

Sprendimas. $\alpha = \dfrac{1-Q}{2} = 0,005, z_{0,005} = 2,575.$

$$\hat{\mu}_1 = 10,2 - 2,575\frac{3}{\sqrt{16}} \approx 8,27, \qquad \hat{\mu}_2 = 10,2 + 2,575\frac{3}{\sqrt{16}} \approx 12,13.$$

Taigi $[\hat{\mu}_1; \hat{\mu}_2] = [8,27; 12,13]$. Rasime pasikliautinąjį intervalą, jei $Q = 0,95$. Tada $\alpha = \dfrac{1-Q}{2} = 0,025, z_{0,025} = 1,96.$

$$\hat{\mu}_1 = 10,2 - 1,96\frac{3}{\sqrt{16}} \approx 8,73, \qquad \hat{\mu}_2 = 10,2 + 1,96\frac{3}{\sqrt{16}} \approx 11,67.$$

Taigi $[\hat{\mu}_1; \hat{\mu}_2] = [8,73; 11,67]$. Matome, kad antrasis intervalas yra trumpesnis, tai natūralu, nes jo pasikliovimo lygmuo yra mažesnis.

2. Tirsime atvejį, kai abu parametrai μ ir σ^2 yra nežinomi. Pasinaudosime tokiu faktu: $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S_1^2/n}}$ turi Stjudento skirstinį su $n-1$ laisvės laipsniais. Todėl

$$P\left(-t_\alpha(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S_1^2/n}} < t_\alpha(n-1)\right) = Q,$$

čia $t_\alpha(n-1)$ yra Stjudento skirstinio su $n-1$ laisvės laipsniais α lygmens kritinė reikšmė, t.y. jei T turi Studento skirstinį su $n-1$ laisvės laipsniais, tai $P(T < t_\alpha(n-1)) = 1-\alpha$. Iš čia ir Stjudento skirstinio simetriškumo 0 atžvilgiu gauname

$$P\left(\bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S_1}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_\alpha(n-1)\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right) = Q.$$

Taigi

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} - t_\alpha(n-1)\frac{S_1}{\sqrt{n}}, \qquad \hat{\mu}_2 = \bar{X} + t_\alpha(n-1)\frac{S_1}{\sqrt{n}}.$$

Pavyzdys. Vertybinių popierių rinkos analitikas kiekvieną dieną nustato vertybinių popierių portfelio praeitos dienos kainų vidurkį. Per 2 savaites gauti duomenys: $24; 22; 25; 23; 25; 27; 30; 24; 27; 23$. Raskite dienos kainų $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ vidurkio μ 90% pasikliautinąjį intervalą.

Sprendimas. $Q = 0,9, \alpha = 0,05, n = 10, t_{0,05}(9) = 1,833.$

$\bar{X} = 25, S_1^2 = 5,778,$

$\hat{\mu}_1 = 25 - 1,833\dfrac{\sqrt{5,778}}{\sqrt{10}} \approx 23,61, \quad \hat{\mu}_2 = 25 + 1,833\dfrac{\sqrt{5,778}}{\sqrt{10}} \approx 26,39.$

Kainos vidurkio 90% pasikliautinasis intervalas yra $[23,61; 26,39]$.

3.3 Normaliojo skirstinio dispersijos pasikliautinasis intervalas

3. Tarkime, kad žinomas μ ir nežinomas σ^2, stebimo atsitiktinio dydžio X skirstinys $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Jau parodėme, kad S_0^2 yra efektyvusis σ^2 įvertis. Nagrinėkime

```
kaina <- c(24,22,25,23,25,27,30,24,27,23)
> kaina
 [1] 24 22 25 23 25 27 30 24 27 23
> t.test(kaina,alternative = "two.sided",paired = FALSE,
conf.level = 0.90)

        One Sample t-test

data:  kaina
t = 32.89, df = 9, p-value = 1.093e-10
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
90 percent confidence interval:
 23.60662 26.39338
sample estimates:
mean of x
       25
> var(kaina)
[1] 5.777778
```

2 pav.: Vidurkio PI pavyzdžio duomenims.

intervalą $(v_1 S_0^2, v_2 S_0^2)$, kai $0 < v_1 < v_2$. Jį atitinka pasikliovimo tikimybė

$$Q = P\left(v_1 S_0^2 < \sigma^2 < v_2 S_0^2\right) = P\left(\frac{n}{v_2} < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2 < \frac{n}{v_1}\right).$$

Žinoma, kad suma

$$n\left(\frac{S_0}{\sigma}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2$$

yra pasiskirsčiusi pagal χ^2 su n laisvės laipsnių dėsnį. Todėl, parinkę $v_1 = \frac{n}{u_2}$, $v_2 = \frac{n}{u_1}$, $0 < u_1 < u_2$, turime

$$Q = P(u_1 < \chi^2(n) < u_2).$$

Jei pasikliovimo lygmuo Q duotas, tai u_1 ir u_2 reikia taip parinkti, kad jie tenkintų šią lygybę. Aišku, tai galime padaryti be galo daug būdų. Paprastai imama

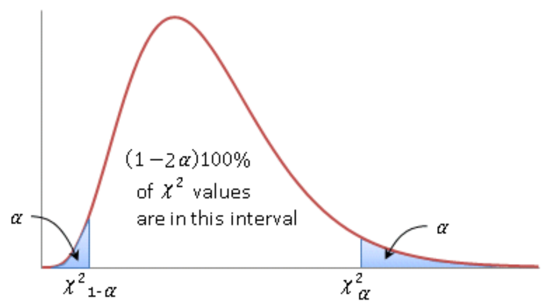
$$P(0 < \chi^2(n) < u_1) = \frac{1-Q}{2} = \alpha,$$
$$P(u_2 < \chi^2(n) < \infty) = \frac{1-Q}{2} = \alpha.$$

$u_1 = \chi^2_{1-\alpha}(n)$ ir $u_2 = \chi^2_{\alpha}(n)$, čia $\chi^2_{\alpha}(n)$ yra χ^2 skirstinio su n laisvės laipsnių α lygmens kritinė reikšmė. Taigi

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{S_0^2 n}{\chi^2_{\alpha}(n)}, \hat{\sigma}_2^2 = \frac{S_0^2 n}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}.$$

4. Tarkime, kad μ ir σ^2 nežinomi, stebimo atsitiktinio dydžio X skirstinys $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Pasinaudosime tuo, kad statistika

$$(n-1)\left(\frac{S_1}{\sigma}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - \bar{X}}{\sigma}\right)^2$$



3 pav.: χ^2 skirstinio kritinės reikšmės.

yra pasiskirsčiusi pagal χ^2 su $n-1$ laisvės laipsnių dėsnį. Samprotaudami panašiai, kaip punkte 3., gausime dispersijos pasikliautinąjį intervalą:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{S_1^2(n-1)}{\chi_\alpha^2(n-1)}, \hat{\sigma}_2^2 = \frac{S_1^2(n-1)}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}.$$

Pavyzdys. Vienas iš staklių išsiderinimo požymių yra gaminamų detalių skersmens pokyčiai. Leistinas svyravimų nuokrypis yra $\sigma = 1$ mm. Išmatavus 31 detalę, gauta $S_1 = 1,5$ mm. Rasti skersmens svyravimų dispersijos 95% pasikliautinąjį intervalą ir nuspręsti, ar staklės yra išsiderinusios. Skersmens pokytis $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, abu parametrai nežinomi.

Sprendimas. $Q = 0,95, \alpha = 0,025, 1-\alpha = 0,975, n = 31, \chi^2_{0,025}(30) = 46,98, \chi^2_{0,975}(30) = 16,79$.

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1,5^2 \cdot 30}{46,98} \approx 1,44, \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1,5^2 \cdot 30}{16,79} \approx 4,02.$$

Pasikliautinasis intervalas yra $[1,44; 4,02]$. Kadangi pagal normatyvą $\sigma = 1$ mm, $(\sigma^2 \notin [1,44; 4,02])$ stakles galima laikyti išsiderinusiomis.

```
> (30*1.5^2)/qchisq(.975, df=30)
[1] 1.436805
> (30*1.5^2)/qchisq(.025, df=30)
[1] 4.020065
```

4 pav.: Dispersijos PI pavyzdžio duomenims.

Pavyzdys. Detalių ilgis matuojamas milimetrais turi normalųjį skirstinį $X \sim \mathcal{N}(\mu, 0,0001)$. Kokio dydžio turėtų būti imtis, kad nežinomo detalės ilgio μ 95% pasikliautinasis intervalas nebūtų ilgesnis už 0,003 mm.?

Sprendimas. Pasikliautinojo intervalo ilgis $\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 = 2z_\alpha\sigma/\sqrt{n}$ (žr. 1 punktą). $Q = 0,95, \alpha = 0,025, z_{0,025} = 1,96, \sigma = \sqrt{0,0001} = 0,01$.

$$\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 = \frac{2 \cdot 1,96 \cdot 0,01}{\sqrt{n}} \le 0,003 \Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{2 \cdot 1,96 \cdot 0,01}{0,003} = 13,07, n \ge 170,8.$$

Taigi užteks 171 matavimo.