Paskaita 8

Tiesinio programavimo pagrindai

Labai svarbus išskirtinis programavimo atvejis yra gaminimas, kai tikslo funkcija ir apribojimai yra tiesiniai.

Panagrinėkime keletą taikomųjų pavyzdžių.

1. Maisto gaminimas. Dieta

Reikia pagaminti patiekalus (pietų meniu), kurių sudėtyje būtų n medžiagų (baltymų, vitaminų, mineralų, druskų ir t.t.). Šios medžiagos įvairiomis proporcijomis yra sandaroje/dalyvauja m produktuose iš kurių gaminami pietūs/meniu

Pažymėkime $y_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$

j-tojo produkto kiekį, kurį nau-

dosime gamybos procese.

c_i, $i = 1, \dots, n$ yra būtina kritinės medžiagos

kiekis ĕ meniu sąraše.

a_{ji} yra i-tosios medžiagos

kiekis j-tajame produkte (vienoje

vienete šio produkto, tarkim.)

b_j yra j-tojo produkto vieneto kaina

Norime, kad bendra visų pasirinktų

produktų kaina būtų minimali, o

visų medžiagų kiekiai būtų pakankami

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min \\ \sum_{j=1}^{m} y_j a_{ji} \geq c_i, \; i = 1, n. \\ y_j \geq 0, \; j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Gamybos procesas.

Įmonė gamina n gaminių

$$x_i \geq 0 , \quad i = 1, \ldots, n$$

ir kiekvieną iš jų gali pagaminti naudojant m skirtingų technologijų

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} , \quad x_{ij} \geq 0.$$

Realizuojant šias technologijas sunaudojamas skirtingas įvairių resursų kiekis a_{ijk}, o bendras kiekvieno resurso kiekis yra ribotas

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ijk} \, x_{ij} \leq b_k , \quad k = 1, \ldots, K.$$

Suminė gaminių vertė

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \, x_{ij} \to \max.$$

Bendras uždavinio formulavimas

Žinome vektorius

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

matricą

$$A = \left(a_{ij} \right) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

Reikia rasti vektorių

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

kuris yra tokio uždavinio sprendinys

$$c^T x \longrightarrow \max, \qquad (T)$$

kai tenkinami nelygybių tipo apribojimai

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Tokį uždavinį vadiname užrašytu <u>normaliąja</u> forma

Jeigu apribojimai yra lygybių tipo:

$$c^T x \longrightarrow \max$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

tai ~~tokią~~ formą vadiname kanonine

Tai tiesinio programavimo uždavinys.

Pastebėsime, kad normalinę ir kanoninę uždavinio formas gali būti perrašytos į ekvivalenčias kitos formos formuluotes

a) $$Ax \leq b \iff Ax + \tilde{x} = b, \quad \tilde{x} \geq 0.$$

įvedame laisvus naujus kintamuosius

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = (A, I)$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar{A}\bar{x} = b.} \qquad \bar{x} \geq 0.$$

b) $$Ax = b \iff \begin{array}{l} Ax \le b \\ -Ax \le -b \end{array}$$

$$x = 3 \iff \begin{array}{l} x \le 3 \\ -x \le -3 \iff x \ge 3. \end{array}$$

Taigi turime $2m$ apribojimų.

Dualusis uždavinys

Tiesioginiam uždaviniui (T) formuluojame dualųjį uždavinį (D)

(D) $b^T y \to \min$, $y \in R^m$,

$A^T y \ge c$, $y \ge 0$.

Kaip matysime tiesioginis ir dualus uždaviniai sudaro efektyvių uždavinių porą, leidžiančią atlikti sprendinio egzistavimo analizę ir sudaryti efektyvius sprendimo algoritmus

Dabar sudarysime dualųjį uždavinį tiesinio programavimo uždav. (kanoninio pav. uždav.)

$$\begin{cases} c^T x \to \max \\ Ax = b, \; x \geq 0 \end{cases} \qquad (T).$$

Lygybės tipo apribojimą galime užrašyti kaip dvi nelygybes:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{cases}$$

Pažymėkime $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

Tada kanoninio pav. uždavinį galime užrašyti normaliąja forma

$$\begin{cases} c^T x \to \max \\ \bar{A} x \leq \bar{b} \end{cases} \qquad (T)$$

Dabar jau galime užrašyti normaliojo tiesioginio ~~pradinio~~ uždavinio dualiojo jo formą

$$\begin{cases} \bar{b}^T \bar{y} \to \min \\ \bar{A}^T \bar{y} \geq c, \quad \bar{y} \geq 0 \end{cases},$$

čia $\bar{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ $y^j \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \bar{y} \in \mathbb{R}^{2m}$.

Perrašome šias lygtis ir nelygybes:

$$b^T y^1 - b^T y^2 \to \min$$

$$A^T y^1 - A^T y^2 \geq c, \quad \begin{matrix} y^1 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{matrix}$$

Pažymėkime $\boxed{y = y^1 - y^2}$

$$\begin{cases} b^T y \to \min \\ A^T y \geq c \end{cases}$$

Bet y ženklui nėra jokių apribojimų

(taip pasikeičia dualinis uždav

Pavyzdžiai.

Parodykite, kad dualiojo uždavinio

$$b^T y \to \min$$

$$A^T y \geq c, \quad y \geq 0$$

dualusis uždavinys sutampa su pradiniu tiesioginiu uždaviniu

$$c^T x \to \max$$

$$A x \leq b, \quad x \geq 0$$

Hintas:

$$-b^T y \to \max.$$

$$-A^T y \leq -c, \quad y \geq 0.$$

Dualumo teorema.

Nagrinėkime tiesioginį tiesinio programavimo uždavinį

$$(T)\ \begin{cases} c^T x \to \max, & x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \le b, \quad b \in \mathbb{R}^m, & A\ \ m \times n\ \text{matrica} \\ x \ge 0 \end{cases}$$

ir dualųjį uždavinį

$$(D)\ \begin{cases} b^T y \to \min, & y \in \mathbb{R}^m \\ A^T y \ge c, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Teorema. Jeigu tiesioginis uždavinys (T) turi sprendinį x°, tai ir dualusis uždavinys (D) turi sprendinį y°, be to

$$c^T x^{\circ} = b^T y^{\circ}.$$

◁ Iš (T) gauname, kad maksimumo uždavinys yra ekvivalentus

$$-c^T x \to \min.$$

Tada iš bendros išgaubtojo programavimo teorijos gauname išvadą, kad $\exists\, \lambda^0 \geq 0$ toks, kad (x^0, λ^0) yra Lagranžo funkcijos

$$F(x,\lambda) = -c^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

balno taškas. Tada $\forall\, \lambda \geq 0,\ x \geq 0$ teisingos nelygybės:

$$-c^T x^0 + \lambda^T (Ax^0 - b) \leq -c^T x^0 + \lambda^{0T}(Ax^0 - b) \leq -c^T x + \lambda^{0T}(Ax - b)$$

Elementariais pertvarkymais gauname ekvivalenčias nelygybes (atlikite)

$$b^T \lambda^0 + x^T(-A^T \lambda^0 + c) \leq b^T \lambda^0 + x^{0T}(-A^T \lambda^0 + c) \leq b^T \lambda + x^{0T}(-A^T \lambda + c)$$

$$-x^{0T}c + x^{0T}A^T\lambda - b^T\lambda$$

$$\le -x^{0T}c + x^{0T}A^T\lambda^0 - b^T\lambda^0$$

$$\le -x^{T}c + x^{T}A^T\lambda^0 - b^T\lambda^0$$

$$\cancel{b^T\lambda + x^{0T}}$$

$$-\left[b^T\lambda + x^{0T}(-A^T\lambda + c)\right]$$

$$\le -\left[b^T\lambda^0 + x^{0T}(-A^T\lambda^0 + c)\right]$$

$$\le -\left[b^T\lambda^0 + x^{T}(-A^T\lambda^0 + c)\right]$$

Tai reiškia, kad (x^0, λ^0) yra balno taškas f-unkcijos:

$$\Phi(\lambda, x) = b^T\lambda + x^T(-A^T\lambda + c)$$

Taigi λ^0 yra sprendinys iškilojo programavimo uždavinio:

$$\begin{cases} b^T\lambda \longrightarrow \min \\ -A^T\lambda + c \leq 0, \; \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{-A^T\lambda \leq -c \Rightarrow A^T\lambda \geq c}$$

Gavome (D) uždavinį, taigi jis turi sprendinį.

Lieka įrodyti, kad

$$\boxed{c^T x^0 = b^T \lambda^0}$$

Jeigu (x^0, λ^0) yra balno taškas, tai

$$\lambda^{0T}(Ax^0 - b) = 0.$$

Analogiškai

$$x^{0T}(-A^T\lambda^0 + c) = 0.$$

Tada surantame, kad.

$$\in \mathbb{R}$$

$$c^T x^0 = \lambda^{0T} A x^0 = \lambda^{0T} b = b^T \lambda^0$$

Teorema yrodyta.