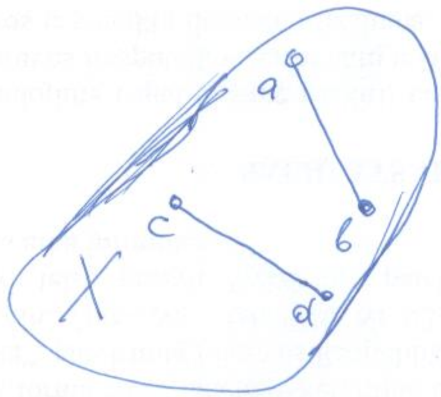
Paskaita 7

Iškilasis programavimas

Apibr. Aibė $X \subset R^n$ yra vadinama iškila, jeigu aibei X priklauso ir bet kurios jos dvi taškus jungianti atkarpa.



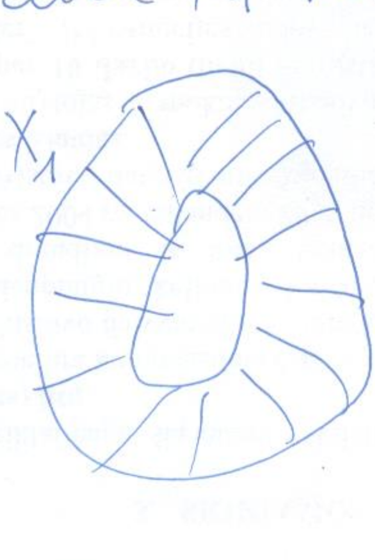
$a, b \in X$

$c, d \in X$

$$x(\lambda) = \lambda a + (1-\lambda) b \in X$$

$$\lambda \in [0, 1]$$

Bet aibė X_1 nėra iškila.



Čia paminėsime keletą naudingų rezultatų.

T.1 Bet kokių skaičiaus iškilų aibių X_j, $j=1,\dots,n$ sankirta yra iškila aibė

$$X = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cdots \cap X_n$$

Įrodymas. Nagrinėkime atvejį $n=2$ (bendras atvejis tada įrodomas indukcijos būdu)

Pažymėkime $Z = X_1 \cap X_2$.

Imkime $z_1, z_2 \in Z$

• Kadangi $z_1, z_2 \in Z$, tai jie priklauso ir aibėms X_1, X_2,

$$z_1, z_2 \in X_1, \quad z_1, z_2 \in X_2$$

Bet X_1 ir X_2 yra iškilos aibės $\Rightarrow$

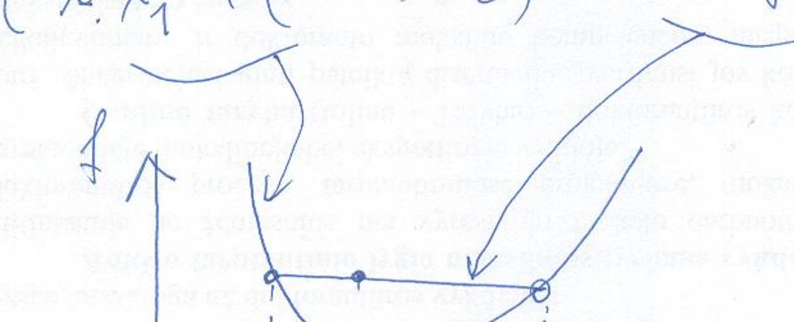
$$z(\lambda) = z_1\lambda + z_2(1-\lambda) \in X_j, \ j=1,2$$

visiems $0 \le \lambda \le 1$

O tada $z(\lambda) \in Z$, taigi Z yra iškila aibė

Funkcija $f(x)$, kuri yra apibrėžta iškilos aibės X taškuose, vadinama iškila, jeigu $\forall\, x_1, x_2 \in X$ ir $\forall\, \lambda,\ 0 \le \lambda \le 1$ teisingas įvertis

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$



Funkcija $f(x)$ yra vadinama griežtai iškila, jeigu

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

t. y. $f(x)$ grafike nėra tiesinių atkarpų.

T2. Jeigu $f(x)$ yra iškila funkcija (ši priminsime, kad ji apibrėžta iškilos aibės X taškuose), tai $\forall c$, aibė

$$\tilde{X} = \{ x \in X : f(x) \le c \}$$

yra iškila (arba tuščia, bet tuščia aibė irgi yra iškila – įrodykite)

Įrodymas. Imkime $x_1, x_2 \in \tilde{X} \Rightarrow$

$$f(x_1) \le c, \quad f(x_2) \le c. \quad \text{Kadangi}$$

$f(x)$ yra iškila, tai

$$f(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}_{\in X\,?}) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\le \lambda c + (1-\lambda) c = c.$$

Taigi $x(\lambda) \in \tilde{X}$, vadinasi $\tilde{X}$ tikrai yra iškila aibė

Savybė 1. Iškila funkcija $f(x),\ x\in X$ yra tolydi visuose vidiniuose aibės X taškuose. (Įrodykite!)

Savybė 2. Jeigu funkcijos $f^i(x),\ x\in X$, $i=1,2,\dots,m$ yra iškilos, tai $\forall \alpha_i \geq 0$ yra iškilos ir f-jos

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f^i(x).$$

~~Įrodymas~~ Nagrinėkime

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \underbrace{f^i(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)}_{\text{išk. f-jos}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\lambda f^i(x_1)+(1-\lambda)f^i(x_2)\right)$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f^i(x_1)+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f^i(x_2)$$

$$=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \quad \triangleright$$

<u>Savybė 3.</u> Funkcija:

$$f(x) = \max_{1 \le i \le m} f^i(x)$$

yra iškila.

(Įrodykite!)

Dabar suformuluosime vieną svarbiausių tokių uždavinių savybę.

<u>Savybė 4</u> Iškila funkcija f(x) <u>negali turėti</u> dvi skirtingas <u>lokalių</u> minimumų reikšmes. Taigi lokalusis minimumas yra <u>globalusis minimumas</u>. Jeigu f(x) yra griežtai iškila, tai minimumo taškas <u>yra vienintelis</u>.

<u>Reiškia</u> globalaus minimumo paiešką galime atlikti ir gradientinio nusileidimo metodu.

Įrodymas. Tarkime priešingai, kad egzistuoja du lokalaus minimumo taškai $x_1, x_2 \in X$, kuriuose lokalaus minimumo reikšmės yra skirtingos, pvz.

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Imkime tašką

$$x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Tada

$$f(x(\lambda)) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) \overset{< f(x_1)}{f(x_2)}$$

$$< f(x_1)$$

↓ griežtai mažiau.

Imdami λ artimą 1, gauname, kad $x(\lambda)$ yra kiek norima arti x_1. O tai priešt. teiginiui, kad $f(x_1)$ yra lok. minim.

Vektorius $l \neq 0$ apibrėžia leistiną kryptį taške $x \in X$ (aibės X atžvilgiu), jeigu $\exists\, \varepsilon_1 > 0$, toks, kad

$$x + \varepsilon l \in X \quad \forall \varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$$

Tada $x^0 \in X$ yra iškilios f-jos $f(x)$ minimumo taškas ($f(x)$ yra diferencijuojama visomis kryptimis) $\Leftrightarrow$ išvestinė bet kokia kryptimi (f-jos $f(x)$) yra neneigiama. $\frac{\partial f}{\partial l} \geq 0$

Uždavinys. (iškiliojo programavimo)

$f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ $x \in R^n$ yra iškilos funkcijos. iškiloj aibėje $\varPhi$

Reikia rasti $x^0 \in \varPhi$, $g(x^0) \leq 0$ tenkinantį sąlygą

$$f(x^0) = \min f(x), \quad g(x) \leq 0, \quad x \in \varPhi$$

leistinieji taškai $\Rightarrow$ pagal tokius $x \in \varPhi$, kad $g(x) \leq 0$

Kaip matėme negriežtai iškilos funkcijos savybes, tada leistinų taškų aibė X irgi yra iškila.

Tada f-ja $f(x)$ turi vienintelį lokalų minimumą (reikšmę), kuris yra ir globalus.

T. ~~Sp~~ Iškiliojo programavimo uždavinio sprendinių aibė (gali būti ne vienintelis minimumo taškas, bet reikšmė šiuose taškuose sutampa) yra iškila.

Įrodymas.

Tarkime, kad turime du taškus

$$f(x^1) = \min_{x \in X} f(x),$$

$$f(x^2) = \min_{x \in X} f(x).$$

Žinome, kad tada $f(x^1) = f(x^2) = \alpha$.

Nagrinėkime $\forall \lambda: \ 0 \le \lambda \le 1$:

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda) \cancel{f} x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) = \alpha$$

Taigi

$$f(x(\lambda)) \le \min_{x \in X} f(x), \quad \text{taigi}$$

$x(\lambda)$ irgi yra uždavinio sprendinys, nes mažesnės reikšmės šiame taške nes negalime gauti (f-jos $f(x)$ minimumo reikšmė yra vienintelė).

Sudarome Lagranžo funkciją:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) \qquad \boxed{g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))}$$

(Primename, kad sprendžiame uždavinį su nelygybių tipo apribojimais $g(x) \le 0$, bet Lagranžo funkciją sudarome pagal šabloną, skirtą apribojimams $g(x) = 0$ – lygybių tipo)

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – stulpelis vektorius

$g(x)$ – stulpelis vekt.

Aibė (x^*, λ^*) vektorių $x^* \in Q$, $\lambda^* \geq 0$ (čia Q yra iškila aibė) vadinama Lagranžo f-jos balno tašku, jeigu $\forall x \in Q$, $\lambda \geq 0$ išpildytos nelygybės

$$F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*)$$

<u>Teorema</u>. Jeigu (x^*, λ^*) yra F balno taškas, tai x^* yra iškiliojo programav. uždavinio (1) sprendinys

$$f(x^*) = \min f(x) \qquad (1).$$
$$g(x) \leq 0, \; x \in Q.$$

Pasvarstome, kad šiuo atveju uždavinio rasti balno tašką $F(x, \lambda)$ sudarytas kaip uždaviniui su lygybių tipo apribojimais.

Įrodymas. Užrašykime suformuluotą balno taško nelygybes detaliai:

$$f(x^*) + \lambda^T g(x^*) \leq f(x^*) + \lambda^{*T} g(x^*) \leq f(x) + \lambda^{*T} g(x), \quad \lambda \geq 0, \; x \in Q.$$

(čia λ^{*T} yra eilutė vektorius)

Iš kairiosios nelygybės gauname

$$\lambda^T g(x^*) \leq \lambda^{*T} g(x^*).$$

Parodykime, kad tada bus tenkinami ir apribojimai

$$\boxed{g(x^*) \leq 0} \to \text{nelygybės tipo apribojimas}$$

Tarkime priešingai, kad kažkuriam i: $1 \leq i \leq m$ turime

$g_i(x^*) > 0$ tada imdami $\lambda_j =$ $\forall j \neq i$ ir parinkdami λ_i pakankamai didelį teigiamą skaičių ir nelygybė nebus teisinga

Dabar nagrinėkime dešiniąją nelygybę.

Tada iš nelygybės

$$\lambda^T g(x^*) \le \lambda^{*T} g(x^*)$$

seka, kad

$$\boxed{\lambda^{*T} g(x^*) = 0}$$

Iš tiesų, tarkime priešingai, kad

$$\lambda^{*T} g(x^*) < 0.$$

Tada imkime $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}\lambda^*}$, gauname

prieštaringas nelygybes

$$0 \le \frac{\lambda^{*T}}{2} g(x^*) \le \lambda^{*T} g(x^*) < 0$$

Iš dešiniosios nelygybės dabar gauname

$$f(x^*) \le f(x) + \lambda^{*T} g(x),$$

taigi $\forall x \in \Phi$ tokiems, kad $g(x) \le 0$

gauname $\boxed{f(x^*) \le f(x)}$ Gavome iškilojo program. uždav sprendinį.