Paskaita 11

Simplekso metodas II.

Tarkime turime kraštinį tašką

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x_K > 0 \quad \text{ir } x_K \in \mathbb{R}^m$$

Svarbus klausimas: kaip atpažinti, kad x yra optimalus taškas?

$$F(x^0) \geq F(x), \quad x \in X.$$

Aišku, tada kiekvienos leistinos krypties atžvilgiu

$$\frac{\partial c^T x}{\partial l} \leq 0.$$

Surasime kaip galime charakterizuoti leistinas kryptis $l = \begin{pmatrix} l_K \\ l_P \end{pmatrix}$ $l_P \in \mathbb{R}^{n-m}$, $l_K \in \mathbb{R}^m$.

Tada turi egzistuoti $\varepsilon_1 > 0$, toks kad $\forall \varepsilon: \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$

$x(\varepsilon) = x + \varepsilon l$ priklausо leistinų taškų aibei X:

$$x(\varepsilon) \geq 0, \quad A x(\varepsilon) = b.$$

Užrašykime šiuos sąryšius išreikstine forma:

$$x_K + \varepsilon l_K \geq 0 \qquad \varepsilon l_p \geq 0.$$

$$A_K x_K + \varepsilon A_K l_K + \varepsilon A_p l_p = b$$

$$A = (A_K, A_p). \qquad \begin{matrix} A_K & m \times m \\ A_p & m \times (n-m). \end{matrix}$$

Kadangi $A_K x_K = b$, tai:

$$\boxed{A_K l_K + A_p l_p = 0.}$$

Imdami pakankamai mažą ε_1 gausime, kad $x_K > 0$,

$$x_K + \varepsilon l_K \geq 0.$$

Tada lieka parodyti, kad

$$A_K l_K + A_p l_p = 0, \ l_p \geq 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{l_K = -A_K^{-1} A_p l_p, \quad l_p \geq 0.}$$

Tada:

$$\frac{\partial c^T x}{\partial l} = c^T l = c_K^T l_K + c_p^T l_p$$

$$= -c_K^T A_K^{-1} A_p l_p + c_p^T l_p$$

$$= \left(-c_K^T A_K^{-1} A_p + c_p^T\right) l_p \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_p^T - c_K^T A_K^{-1} A_p \leq 0}$$

Būtina ir pakankama sąlyga

Patikriname dimensijas

C_p^T $1\times(n-m)$ eilutė vektorius

C_k^T $1\times m$ $\quad C_k^T A_k^{-1}$ $1\times m$

A_k^{-1} $m\times m$ matrica

A_p $m\times(n-m)$ matrica

$C_k^T A_k^{-1} A_p$ $1\times(n-m)$ eilutė vekt.

Naujo krašτinio taško skaičiavimas

Jeigu optimalumo sąlyga nėra išpildyta, turime pasirinkti kokia kryptimi ieškosime naujo kraštinio taško (jame tikslo funkcija turi padidėti)

-4B-

Išrenkame didžiausią komponentę (teigiamiausią skaič. > 0) vektoriuje

$$c_p^T - c_k^T A_k^{-1} A_p.$$

$$k = \arg\max_j \{ c_p^T - c_k^T A_k^{-1} A_p \}$$

Tada judame kryptimi

$l = a^k$ stulpelis

$$x(\theta) = x_k - \theta a^k \qquad 1 \le j \le m$$

Surandame maksimalią θ reikšmę, kol dar visos komponentės ≥ 0.

$$i = \arg\min_{1 \le j \le m} \theta_j$$

Tada naujas kraštinis taškas gaunamas vietoj x_i komponentės parenkant x_k komponentę.

Procesas kartojamas, kol randame optimalų kraštinį tašką

-5

Spręskime pvz., kuris padės įvertinti algoritmo realizaciją

4 tipų gaminiai; produkcijos kaina

$c_1 = 2, \; c_2 = 1, \; c_3 = 3, \; c_4 = 5$

(vektorius c)

$$c^T x = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to max$$

Gamybos kaštai (energija, žaliavos, darbo resursai)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 25 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, 4$$

Normalizuota forma pateikta uždaviny 6

užrašome kanoninę formą

(lygybių apribojimai)

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 40 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 25. \end{cases}$$

Papildomi (laisvi) kintamieji irgi tenkina nelygybes $\boxed{x_i \geq 0, \quad i = 5, 6, 7}$

Reikia parinkti leistiną kraštinį tašką $\bar{x} \in X \subset R^n$ $(n = 7)$

teigiamų koordinačių turi būti

$$\boxed{m = 3}$$

Nesunku patikrinti, kad toks taškas yra: (kaip tai atlikti bendruoju atveju aptarsime vėliau)

$$\boxed{\bar{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 30, 40, 25)^T}$$

$$C_K^T = \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \\ \multicolumn{3}{c}{(0,\ 0,\ 0)} \end{array}, \quad C_p^T = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \multicolumn{4}{c}{(2,\ 1,\ 3,\ 5)} \end{array}$$

$$x_K^T = (30, 40, 25) \quad x_p^T = (0, 0, 0, 0).$$

$$\cancel{x_p^T = (0, 0, 0, 0)}$$

$$A_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \ A_p = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Patikrinkime tokio kraštinio taško optimalumą

$$\boxed{C_p^T - \underbrace{C_K^T A_K^{-1} A_p}_{= 0} \leq 0}$$

$$\boxed{\Delta = (2, 1, 3, 5) \leq (0, 0, 0, 0)}$$

Neteisingas įvertis.

Galime pagerinti planą. Tikslo funkcija didėja greičiausiai, kai išrenkame didžiausią komponentę

$$\max_j (\Delta_j) = \max_j \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2, & 1, & 3, & 5 \end{array} \right) = 5$$

$$\arg\max_j = 4$$

Judėjimo kryptį apibrėžia a^4 stulpelis

$$a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reikia rasti žingsnio ilgį ir perskaičiuoti simplekso metodo informaciją (matricą).

$$x_k(\theta) = x_k - \theta a^4$$

$$\theta = \min\left(\frac{30}{2}, \frac{40}{2}, \frac{25}{1}\right) = 15$$

$$\arg\min = 5$$

(a^5 pakeičiame stulpeliu a^4)

naujas kraštinis taškas

$$\begin{pmatrix} 4, & 6, & 7 \\ x_4 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}$$

Naujas kraštinis taškas

$$x_k^{1,T} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 10 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \quad c_k^{1T} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\theta \qquad a^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_6^1 = 40 - 2 \times 15 = 10$$

$$x_7^1 = 25 - 1 \times 15 = 10$$

Skaičiuojame naujas matricas

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_k^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_P^1 = \tilde{A}_k^{0,-1} \tilde{A}_P^0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_p^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & +\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \\ X_p^{1,T} = & \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tikriname ar naujas kraštinis taškas yra optimalus

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 7 \end{array} \\ C_k^T = & \begin{pmatrix} 5, & 0, & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \\ C_p^T = & \begin{pmatrix} 2, & 1, & 3, & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(2, 1, 3, 0) - (5, 0, 0)\, A_p^1$$

$$= (2, 1, 3, 0) - \left(5, \frac{15}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$= \left(-3, -\frac{13}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

Nėra optimalus

Atlikite paskutinį algoritmo žingsnį ir parodykite, kad optimalus sprendinys yra

$$\bar{x}^2 = (0, 0, 4, 13, 10, 0, 0)$$

$$\boxed{c^T \vec{x}^2 = 77}$$