Paskaita 6

Modeliai, aprašomi paprastųjų diferencialinių lygčių sistemomis

1 modelis. Mėnulio judėjimas aplink Žemę jos traukos jėgų lauke

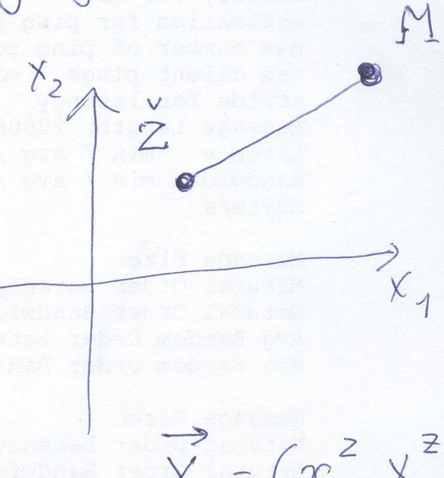
- **Faktoriai**, kuriuos reikia įvertinti sudarant matematinį modelį

Niutono gravitacinės traukos dėsnis

Du kūnai, kurių masės M ir m traukia vienas kitą jėga

$$F = G\,\frac{mM}{r^2}, \qquad (F = mg)$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2)$$



$$r^2 = (x_1^Z - x_1^M)^2 + (x_2^Z - x_2^M)^2$$

$$\vec{X}_Z = (x_1^Z, x_2^Z)$$

$$\vec{X}_M = (x_1^M, x_2^M)$$

G – gravitacinė konstanta

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2 \cdot kg^{-2}}$$

$$r = 384\,400\ \mathrm{km} = 3.844 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}.$$

-2-

- Niutono antrasis dėsnis

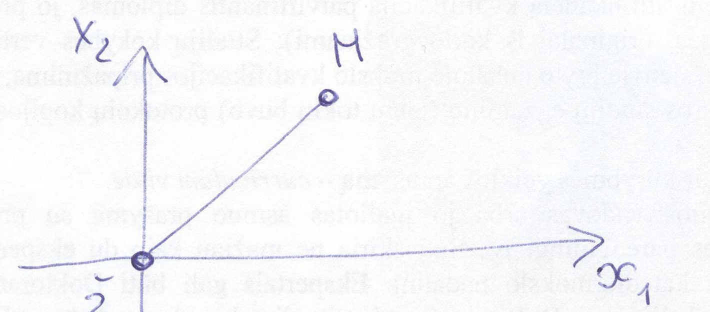
$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=\vec{F}$$

- Mėnulio masė m yra daug mažesnė už Žemės masę M

$$\left(m = 7.348\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg},\ M=5{,}972\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\right)$$

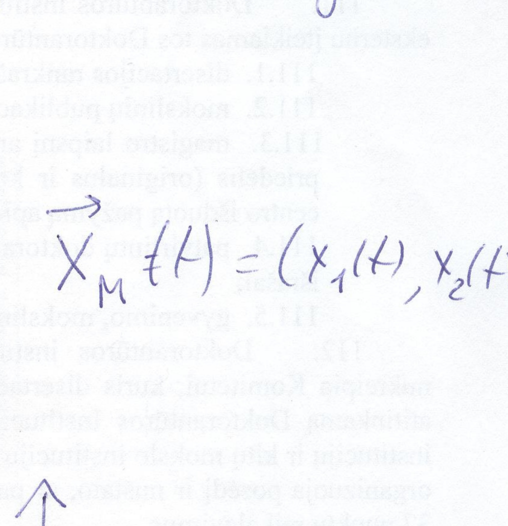
$$m = 0{,}012\,M$$

Išvada! Kadangi $M>>m$ tai galime laikyti, kad Žemė nejuda ir yra koordinačių centre.



$$X_M(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

$$\vec{F} = (F_{x_1}, F_{x_2})$$



$$F_{x_1} = -|\vec{F}|\cos\alpha, \quad F_{x_2} = |\vec{F}|\sin\alpha$$

Išreiškiame $\cos\alpha$ ir $\sin\alpha$ per taško $\vec{X}$ koordinates

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{x_2}{r}$$

$$F_{x_1} = -G\frac{mM}{r^3}x_1, \quad F_{x_2} = -G\frac{mM}{r^3}x_2$$

$$r^3 = \left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right)^{3/2}$$

<u>Matematinis modelis</u>

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -G\frac{mMx_1}{(x_1 + x_2^2)^{3/2}},$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -G\frac{mMx_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}.$$

Abi lygties puses galime padalinti iš m (nes jos spr. nepriklauso)

Papildomai užduodame pradines sąlygas

$$x_j(0)=x_{j0}, \quad \frac{dx_j}{dt}(0)=v_{j0}, \quad j=1,2$$

Modeliujant uždavinį patogu užrašyti lygtis nedimensine forma

$$x_j(t)=r_0\, u_j(\tilde{t})$$

$$t=t_0\,\tilde{t}$$

$$\frac{d^2 u_j}{d\tilde{t}^2} = \frac{GM t_0^2}{r_0^3}\,\frac{u_j}{(u_1^2+u_2^2)^{3/2}}$$

$$\frac{GM t_0^2}{r_0^3} = 1$$ (taip parenkame t_0 ir r_0)

r_0 ~ atstumas tarp Mėnulio ir Žemės

Klausimas: Koks tada t_0?

Užduotis 2

Imkime tokias pradines sąlygas

$$u_1(0) = 1 - e, \quad \frac{du_1}{dt}(0) = 0,$$

$$u_2(0) = 0, \quad \frac{du_2}{dt}(0) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}$$

Modeliuokite kūnelio trajektorijas, kai $e = 0$, $e = 0.25$, $e = 0.5$

Kokias išvadas galime padaryti (skaitinio sprendimo algoritmų tikslumas, modeliavimo rezultatai)

$$\frac{du_1}{dt} = u_3, \quad \frac{du_2}{dt} = u_4, \quad u_1(0) = 1-e, \quad u_2(0) = 0$$

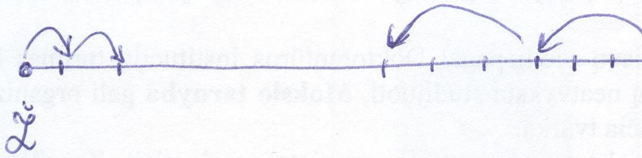
$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{u_1}{(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}} \qquad u_3(0) = 0$$

$$u_4(0) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}$$

$$\frac{du_4}{dt} = -\frac{u_2}{(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}}$$

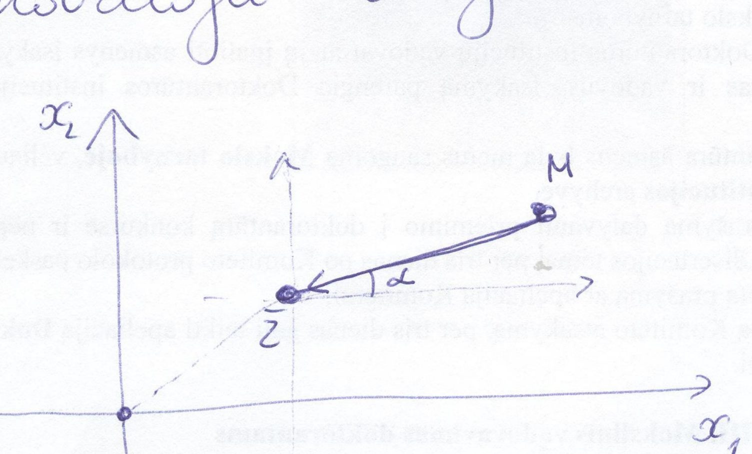
Nagrinėkime situaciją, kai m ir M yra palyginami dydžiai, pvz
$$m = \frac{1}{3} M$$

Tarkime dvi planetos juda tiese



Tada abi planetos juda viena link kitos (tik „Mėnulis" juda trigubai greičiau).

Sudarykime matematinį modelį bendruoju atveju



$$\vec{X}_z = (x_1^z(t), x_2^z(t)), \quad \vec{X}_M = (x_1^M(t), x_2^M(t))$$

$$F^M_{x_1} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{x_1^M - x_1^Z}{r}$$

$$F^M_{x_2} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{x_2^M - x_2^Z}{r}$$

$$r^2 = \left(x_1^M - x_1^Z\right)^2 + \left(x_2^M - x_2^Z\right)^2$$

$$m\frac{d^2x_1^M}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^3}\left(x_1^M - x_1^Z\right)$$

$$m\frac{d^2x_2^M}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^3}\left(x_2^M - x_2^Z\right)$$

$$F^Z_{x_1} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{x_1^Z - x_1^M}{r}$$

$$F^Z_{x_2} = -G\frac{mM}{r^2}\left(x_2^Z - x_2^M\right)$$

$$M\frac{d^2x_1^Z}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^3}\left(x_1^Z - x_1^M\right)$$

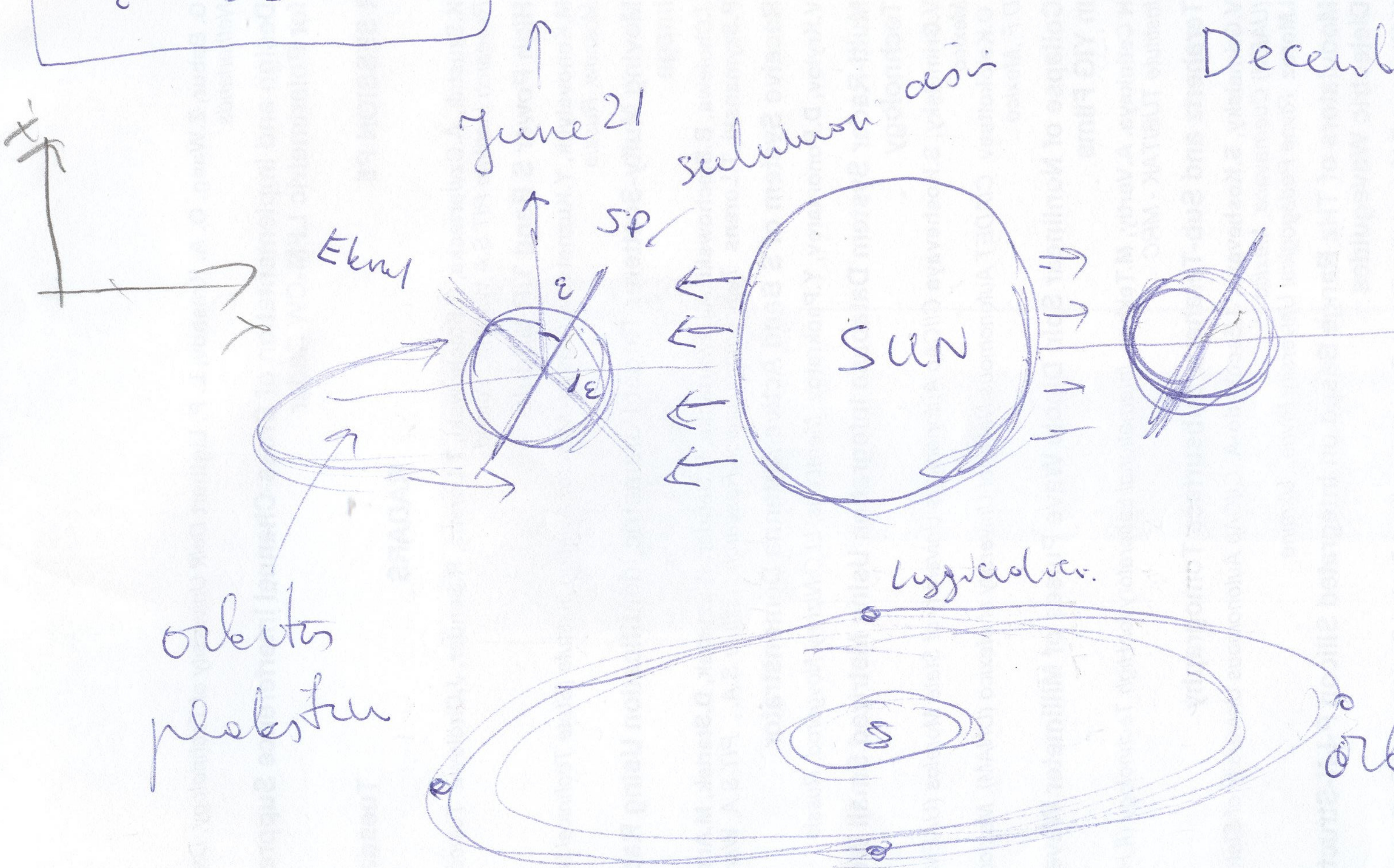
$$M\frac{d^2x_2^Z}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^3}\left(x_2^Z - x_2^M\right)$$

$M_S = 1.9885 \times 10^{30}$ kg

$M_Ž = \frac{1}{332\,940} M_S$

$M_M = \frac{1}{27\,068\,510} M_S$

orbitos ašis



ε: osciliuoja tarp 22.1° ir 24.5° ir periodas 41.000 metų

Dabar 23.4 ir mažėja

orbitos plokštuma

Žemė - atstumas iki Saulės 149 597 870 km

Period. 365,256 d.

Elipsė yra labai artima apskritimui

žvilgsnis Saulės centre

$v = 29.78 \frac{km}{s} = 107208 \frac{km}{h}$