Paskaita 3

Švytuoklė

Švytuoklės yra dažnai sutinkamas procesas / reiškinys. Paminėsime tik kelis svarbius pavyzdžius – laikrodžiai, Fuko švytuoklė (Jonų bažnyčioje Vilniuje)

Paskaitos tikslas sukurti virtualųjį švytuoklės matematinį modelį

Aišku kad švytuoklės (pendulum) judėjimas priklauso nuo daugelio detalių – bet svarbiausia jėga, kuri

1. verčia švytuoklę judėti yra sunkio jėga (Žemės traukos / gravitacinė jėga).

2. Tarsime, kad švytuoklė yra sudaryta iš sunkaus svarelio, pritvirtinto

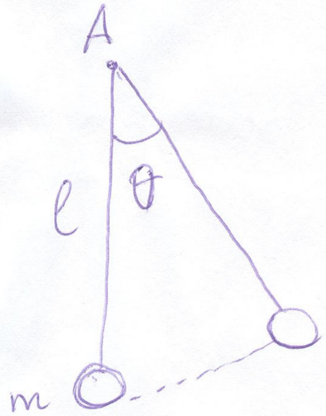
prie ilgos stygos (virvės, raiščio - - string), jos ilgis yra l.

Svarelio masė yra m.

3. Kiti faktoriai, kurie veikia šį eksperimentą yra trintis klampioje terpėje (ore), svarelio forma, kaip svarelis pritvirtintas prie stygos ir kaip įtvirtinta styga. Tačiau sudarydami matematinį modelį šių faktorių poveikio neįvertinsime.

4. Sudarysime stygos svyravimo matematinį modelį (dif lygčių kurse, fizikos/mechanikos paskaitose, jau galėjo būti toks modelis pateiktas)

Tarsime, kad styga juda (x, y) plokštumoje. Bendresnis atvejis vyksta ir sukamasis stygos judėjimas (x, y, z) ~~plokšt~~ erdvėje – Fuko švytuoklė.



θ – theta

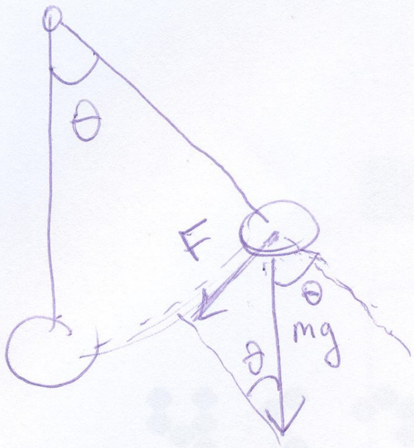
Mechanikos teorija

Niutono dėsnis

$$\boxed{ma = F}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad$$ s – trajektorija $s = s(t)$.

Jėga, veikianti švytuoklės svarelį yra sunkio jėga mg, g yra ~~sunk~~ gravitacinis pagreitis.



Nagrinėsime tik jėgos dedamąją liestinei kryptimi.

$[\theta]$ - radianai

$$\boxed{F = -mg\sin\theta}$$

Jėga stengiasi grąžinti svarelį į pradinę padėtį (rimties tašką)

$$ma = -mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -g\sin\theta}$$

Svarelio masė neturi poveikio judėjimui

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad s = l\theta \quad \Rightarrow a = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

($2\pi l$ - pilnas perimetras)

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.}$$

Galileo bandymai
Pizos bokštas

Visi kūnai krenta tuo pačiu greičiu!

Iš diferencialinių lygčių kurso žinome, kad antrosios eilės diferencialinė lygtis turi sprendinių šeimą (jeigu turi sprendinių). Todėl matematinį modelį papildome pradiniais sąlygomis:

$$\boxed{\theta(0) = \vartheta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = v_0/l.}$$

$$\left(\text{nes } v = l\,\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Remdamiesi bendrąja matematinio modeliavimo schema sudarysime ir šio modelio paprastesnį variantą.

Tarkime, kad <u>svyravimo ~~ampl~~ kampas yra mažas</u>:

$$\boxed{|\theta| << 1} \qquad (P1).$$

Tada galime pasinaudoti sąryšiu

$$\sin\theta \approx \theta \quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right).$$

Gauname tiesinę diferencialinę lygtį su pastoviaisiais koeficientais

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.}$$

Pastaba. Švytuoklės svyravimų modelį galime gauti ir remdamiesi kitu bendruoju dėsniu, kad sistemos pilnoji energija yra pastovi. Nagrinėtume kinetinę energiją $E_k(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$ ir potencinę energiją $E_p(t) = mgh(t)$.

Raskime paprastesnio modelio analizinį sprendinį, kai styga išvesta iš pusiausvyros, bet pradinis greitis 0.

$$\boxed{\theta(0)=\theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0)=0}$$

$\frac{l}{g}=a^2$ - pažymėkime.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+a^2\theta=0 \Rightarrow \boxed{\theta(t)=c_1\cos at+c_2\sin at}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-c_1\sin at+c_2\cos at$$

iš pradinių sąlygų $\Longrightarrow$ $c_2=0$.

Iš pirmos pradinės sąlygos

$$\boxed{\theta(t)=\theta_0\cos(at)}$$

Gavome, kad styga svyruoja harmoniniu svyravimo dėsniu.

Svyravimų periodas

$$aT_0 = 2\pi \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Išvada 1. Žinodami šį sąryšį galime eksperimentu išmatuoti g reikšmę (jį lėtai judant žemės rutulio?!)

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \Rightarrow \boxed{g = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 l}$$

Atlikime eksperimentą laboratorinio darbo metu.

Supaprastintas modelis yra geras artinys, kai $|\theta_0| \ll 1$ mažas.

<u>Klausimas</u>. Kaip keičiasi svyravimų periodas, jei θ_0 nėra labai mažas?

Pailgėja, sutrumpėja?

Kaip įvertinti šiuos pokyčius?

Kadangi $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$,

tai galime tikėtis, kad turėtų galioti asimptotinis artinys

$$T_0 \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + c\theta_0^2\right),$$

bet kokia yra konstanta c?

Parodysime, kad $\boxed{c = \frac{1}{16}}$

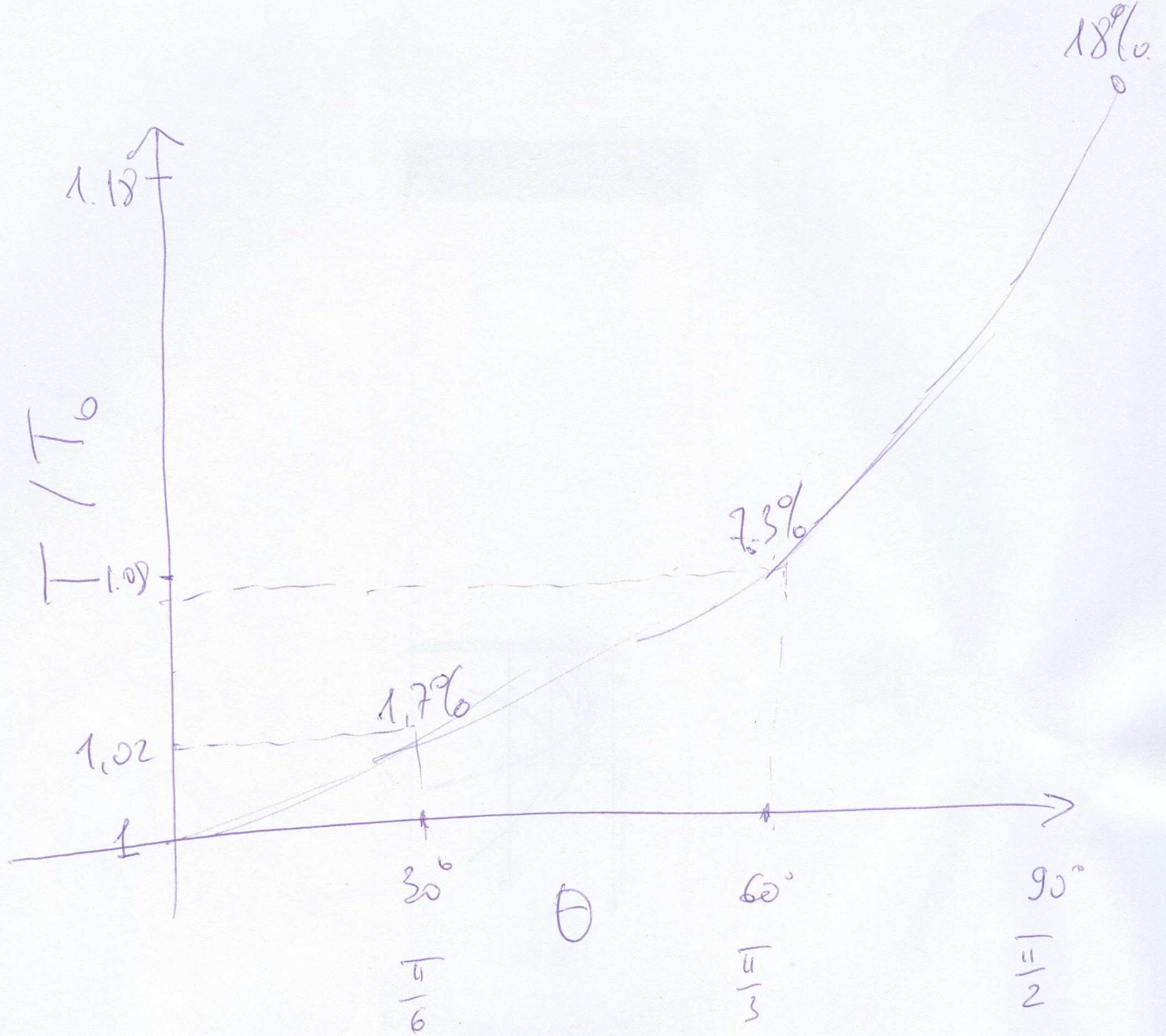
Dabar jau spręsime uždavinį

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0\\ \theta(0)=\theta_0,\quad \frac{d\theta}{dt}(0)=0\end{gathered}}$$

1) Universalus metodas - spręsti uždavinį skaitiniais metodais (integravimo). Aptarsime paprasčiausius algoritmus, taip pat jų didelė biblioteka yra realizuota Matlab

2) Rasti uždavinio ~~elem~~ analizinį sprendinį arba bent suvesti antrosios eilės diferencialinį uždav. į paprastesnę lygtį.

-11 A -



Mažiausių kvadratų metodu aproksimuoti eksperimento (skaičiavimo) rezultatus

Skaitiniai diferencialinių lygčių sprendimo algoritmai.

Nagrinėsime paprasčiausius išreikštinius algoritmus.

1. $$\frac{du}{dt} = f(u,t), \quad u(0) = \bar{u}.$$

1.1. Apibrėžiame diskretųjį tinklą

$$\bar{\omega}_\tau = \{ t_n = n\tau, \; n = 0, 1, \dots, \}$$

Tinklo taškuose apibrėžiame f-ją $U_n = U(t_n)$. ~~t_n~~

1.2. Aproksimuojame diferencialinę lygtį ir pradinę sąlygą

$$\begin{cases} \dfrac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = f(U_n, t_n), & n = 0, 1, \dots \\ U_0 = \bar{u} \end{cases}$$

1.3. Aproksimacijos paklaida.

Imkime tikslų sprendinį $u(t)$.

$$z_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} - f(u_n, t_n)$$

$$= \frac{u_n + \tau u'_n + \frac{\tau^2}{2}\tilde{u}'' - u_n}{\tau} - f(u_n, t_n)$$

$$= \underbrace{u'_n - f(u_n, t_n)}_{0} + \frac{\tau}{2}\tilde{u}'' = \frac{\tau}{2}\tilde{u}'' \le \boxed{C\tau}$$

Aproksimacijos paklaida yra $O(\tau)$ eilės dydis.

1.4. Stabilumas

Nagrinėkime lygtį $\frac{du}{dt} + \lambda u = 0$, $\lambda > 0$.

Jos sprendinys $u(t) = \tilde{u} e^{-\lambda t}$

$$\boxed{|u(t_{n+1})| < |u(t_n)|}$$

Patikrinkime, kada skirtuminio algoritmo sprendinys irgi yra stabilus

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} + \lambda U_n = 0.$$

$$U_{n+1} = (1 - \tau\lambda) U_n$$

$$|U_{n+1}| \le |1 - \tau\lambda| \, |U_n|$$

Algoritmas yra stabilus, kai

$$|1 - \tau\lambda| \le 1 \Rightarrow \boxed{\tau \le \frac{2}{\lambda}}$$

1.5. Didesnio tikslumo aproksimacija

Prediktoriaus-korektoriaus alg.

$$\frac{\tilde{U} - U_n}{\tau} = f(U_n, t_n),$$

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = f\left(\frac{U_n + \tilde{U}}{2}, t_{n+\frac{1}{2}}\right).$$

Aproksimacijos paklaida $O(\tau^2)$ eilės.

2. $$\frac{d^2u}{dt^2} = f(u,t), \qquad u(0) = \bar{u}, \quad u'(0) = V.$$

Išreikštinis algoritmas

$$\frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{\tau^2} = f(U_n, t_n)$$

$n = 1, 2, \dots$

$$U_0 = \bar{u} \qquad U_1 = U_0 + \tau V$$

$$\left(U_0 + \tau V + \frac{\tau^2}{2} f(U_0, t_0)\right)$$

Aproksimacijos paklaida $O(\tau^2)$ eilės.

Stabilumas: $\tau \le \tau_0$