Paskaita 4

Modelių, aprašomų aukštesniųjų eilių diferencialinėmis lygtimis, apžvalga.

Vienas iš svarbiausių faktorių, kad nagrinėjame modelius, aprašomus antrosios eilės diferencialinėmis lygtimis (laiko koordinatės atžvilgiu) yra tas, kad modeliai gaunami iš Niutono dėsnių.

Niutono dėsnis

$$\frac{d}{dt}\left(mv\right) = F \qquad , \qquad v = \frac{du}{dt}$$

Iš diferencialinių lygčių kurso žinome, kad tada reikia turėti dvi pradines sąlygas, kurios iš sprendinių šeimos išrenka reikalingą atskirąjį sprendinį

$$u(0) = u_0 , \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0 .$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = m\frac{d^2u}{dt^2}, \text{ jei } m \text{ - konst}$$

Nagrinėkime mechaninę sistemą, kai kūnas, kurio masė yra m, pritvirtintas prie spyruoklės.

Yra žinoma, kad jei išvedame spyruoklę iš pusiausvyros padėties (ją ištempiame ar suspaudžiame) dydžiu $x(t)$, tai atsiranda jėga, ~~kuri~~ atvirkščiai proporcinga deformacijos dydžiui

(Teiloro pirmasis artinys)

$$F(x, t) = -kx$$

(Tamprumo jėga)

$$\boxed{\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}}_{\text{inercijos jėga}} = -kx}$$

$[k] = ?$

Trinties jėgą kol kas neįskaičiuojame, jos yra silpnos, bet svarbu, kad jos atsiranda tik judant kūnui ir proporcingos greičiui (Teiloro skleid.)

$$F_{tr} = -\eta\frac{dx}{dt} \Rightarrow \left(m\frac{dv}{dt} = -\eta v\right)$$

$[\eta] = ?$ Greitis dėl trinties mažėja

Taip pat mechaninę sistemą gali veikti ir išorinė jėga $f(t)$, kuri priklauso nuo laiko.

Net ir nedideli momentiniai išoriniai šaltiniai per ilgesnį laiką gali smarkiai paveikti sprendinio dinamiką (rezonanso reiškinys)

Nagrinėsime atskirus atvejus

1. Laisvieji svyravimai, nėra trinties

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \qquad [a] \text{- dimensija}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x = 0$$

$$\boxed{a^2 = \frac{k}{m}}$$

Bendrasis sprendinys

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + a^2 = 0 \qquad \boxed{\lambda_{1,2} = \pm a i}$$

$$\boxed{x(t) = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at)}$$

$$x(0) = x_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)(0) = 0.$$

(imkime tokias sąlygas pradines).

$$\frac{dx}{dt} = a\left(-c_1 \sin(at) + c_2 \cos(at)\right).$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

$$x(0) = c_1 \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cos(at)}$$

Sprendinys periodiškai svyruoja

$$\frac{dx}{dt} = -x_0 a \sin(at)$$

Greitis irgi periodiškai svyruoja

Periodas: $aT = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{a}}$

1) Koks bus kūno greitis ~~taško~~ laiko momentu $t_1 = \frac{\pi}{2a}$? Kokia bus taško padėtis?

2. Pridedame trintį: η - eta.

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + \eta\frac{dx}{dt} + kx = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0}$$

$b = \frac{\eta}{m}$ $\quad [b] = ?$

$$\lambda^2 + b\lambda + a^2 = 0$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^2}}$$

1) $b^2 - 4a^2 \geq 0 \quad (= c^2)$

$b > 2a$

$\frac{\eta}{m} > 2\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\boxed{\eta > \sqrt{4km}}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{c}{2}$$

$$x(t) = C_1 e^{+\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Kuri komponentė užgesta greičiau

Kadangi $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, tai $x(t) \to 0$, $t \to \infty$ be oscilacijų.

Trintis pakankamai stipri (Įtraukti pradines sąlygas). $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

2) $b^2 - 4a^2 = -c^2 < 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm i\frac{c}{2}.$$

Gauname tokį sprendinį:

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{c}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{c}{2}t\right)\right)$$

Asimptotinė dinamika nesikeičia

$x(t) \to 0$, $t \to \infty$, bet stebime vis

mažėjančių amplitudžių oscilacijas.

<u>Uždavinys</u> Išnagrinėkite uždavinio

sprendinį, kai $b^2 = 4a^2$,

kaip tada svyruoja kūnas?

Nagrinėsime sistemos priverstinius svyravimus, kai ją iš pusiausvyros išvedame pridedamo jėga

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = A \sin(\omega t)$$

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

1 atvejis. a) Nėra trinties $\eta = 0$.

b) Nuosavieji svyravimai nesutampa su priverstinių svyravimų dažniu $a \neq \omega$, $a^2 = \frac{k}{m}$.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

$$x_1(t) = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at)$$

$$x_2(t) = B \sin(\omega t)$$ (ieškome ~~to~~ dalinio sprendinio)

$$\left(-m\omega^2+k\right)B = A$$

$$B = \frac{A}{k-m\omega^2} = \frac{A/m}{a^2-\omega^2}.$$

$$x(t) = C_1\cos(at) + C_2\sin(at) + \cancel{\frac{A/m}{a^2-\omega^2}\sin\omega}$$
$$+ \frac{A/m}{a^2-\omega^2}\sin(\omega t).$$

Iš pradinių sąlygų gauname

$$x(0) = \boxed{C_1 = 0}$$

$$\dot{x}(t) = aC_2\cos(at) + \frac{A/m}{a^2-\omega^2}\,\omega\cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(0) = aC_2 + \frac{A/m}{a^2-\omega^2}\,\omega = 0.$$

$$C_2 = -\frac{\omega}{a}\,\frac{A/m}{a^2-\omega^2}$$

$$x(t) = \frac{A/m}{a^2-\omega^2}\left(-\frac{\omega}{a}\sin(at)+\sin(\omega t)\right)$$

Nagrinėkime ribinį atvejį, kai

$$\omega \longrightarrow a.$$

Pritaikome Liopitalio taisyklę (aišku, galime ir spręsti lygtį, kai $\omega = a$, bet mus domina kaip sistema elgiasi, kai $|\omega - a| \ll 1$.)

$$\lim_{\omega \to a} \frac{-\frac{\omega}{a}\sin(at) + \sin(\omega t)}{a^2 - \omega^2} = \frac{f_1'}{f_2'}$$

$$= \frac{t\cos(\omega t) - \frac{\sin at}{a}}{-2\omega} \xrightarrow[\omega \to a]{} \frac{t\cos(at) - \frac{\sin at}{a}}{-2a}$$

$$\sim -\frac{t}{2a}\cos(at) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$$

<u>Rezonansas</u>

Nagrinėkime atvejį, kai $\omega \neq a$, bet $|\omega - a| << 1$ yra mažas skaičius

$$X(t) = \frac{A/m}{a^2-\omega^2}\left(-\frac{\omega}{a}\sin(at) + \sin(\omega t)\right)$$

1. Atlikite analizę (laboratorinis darbas)

kai $a^2 = 50$ $\omega^2 = 49$

$$\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a}\sin(at) = \sin(\omega t) - \sin(at) + \left(1-\frac{\omega}{a}\right)\sin(at)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\omega-a}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega+a}{2}t\right) + \left(1-\frac{\omega}{a}\right)\sin(at)$$

Pagrindinė komponentė

$$\tilde{X}(t) = \underbrace{\frac{A/m}{a^2-\omega^2}\,2\cdot\sin\left(\frac{\omega-a}{2}t\right)}_{M(t)\text{ - amplitudė}}\;\underbrace{\cos\left(\frac{\omega+a}{2}t\right)}_{\text{Greiti svyravimai}}$$

harmoningai lėti svyra

Nagrinėkime atvejį, kai veikia trintis η, bet ji nėra labai stipri

$$0 < \eta < \sqrt{2km}.$$

Imkime $\underline{\omega = a}$ ir surasime, kokia tada yra svyravimų amplitudė ~~(MM kursinio darbo užduotys)~~.

Toks reiškinys vadinamas mechaniniu rezonansu.

Ištirkite, kaip vyksta svyravimai, kai

$$\omega = a, \quad \eta > \sqrt{2km}.$$

(2 lab. darbas)