Paskaita 11

Ištirsime kai kurios atskiras funkcijos $F(x, y, y')$ atvejus.

Tarkime, $F = F(x, y')$ (tai yra ji nepriklauso tiesiogiai nuo y)

Oilerio lygtis (prisiminkime būtiną sąlygą)

$$-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}(x, y, y')\right) + F_y(x, y, y') = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(F_{y'}(x, y, y')\right) = 0.$$

$$\boxed{F_{y'}(x, y, y') = C.}$$

Išsprendę šią pirmosios eilės dif. lygtį, surasime ekstremalę.

2) Tarkime $F = F(y, y')$, t.y. F tiesiogiai nepriklauso nuo x.

Tada Oilerio lygtį pirmiausia pertvarkome: padauginame iš y' ir perrašome taip:

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x, y, y') - y' F_{y'}(x, y, y')\Big) - F_x(x, y, y') = 0.$$

Išvedimas (patikrinimas)

$$F_x(x, y, y') + y' F_y(x, y, y') + y'' F_{y'}(x, y, y') - y'' F_{y'}(x, y, y') - y' \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') - F_x(x, y, y') = 0.$$

Gauname dif lygtį: $(F = F(y, y'))$

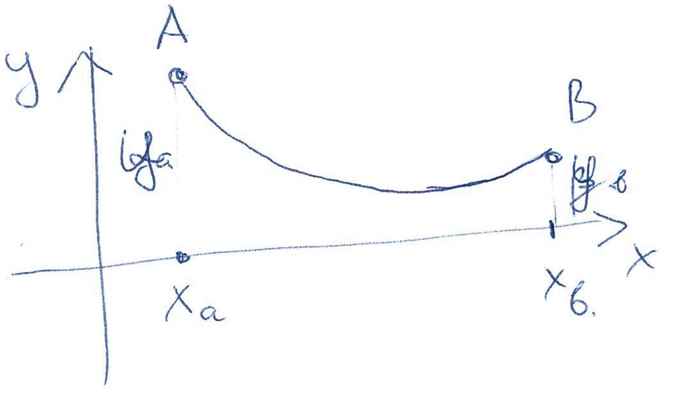
$$\frac{d}{dx}\left(F(y,y') - y' F_{y'}(y,y')\right) = 0.$$

$$\boxed{F(y,y') - y' F_{y'}(y,y') = C.}$$

<u>Pastaba</u> Konstantas C_1 ir C_2 parenkame iš leistinųjų f-jos papildomų kraštinių sąlygų

$$y(x_a) = y_a, \quad y(x_b) = y_b.$$

Išspręskime <u>brachistochronos</u> uždavinį



$$A = (x_a, y_a)$$

$$B = (x_b, y_b).$$

$$T(y) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}}$$

Įveskime naują koordinačių sistemą

$$\tilde{x} = x - x_a$$

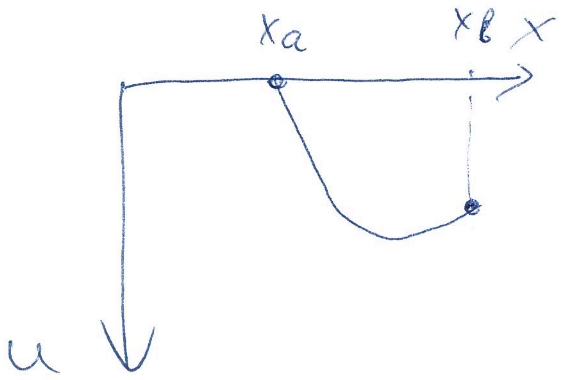
$$u(x) = y_a - y(x)$$

$$u' = -y'$$

$$u(x_a) = 0$$

$$(u')^2 = (y')^2$$

$$u(x_b) = u_b = y_a - y_b$$



$$\boxed{\tilde{x}_b = x_b - x_a}$$

$$T(u) = \int_{0}^{\tilde{x}_b} \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{2gu}}$$

$F(u, u')$ nepriklauso nuo x tiesiogiai

Turime integralą.

$$F(u,u') - u' F_{u'}(u,u') = C.$$

(konstantą $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ galime iškelti prieš integralą, ji nepakeis Oilerio lygties !)

$$\sqrt{\frac{1+(u')^2}{u}} - \frac{(u')^2}{\sqrt{u(1+u'^2)}} = C.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+(u')^2 - (u')^2}{\sqrt{u(1+u'^2)}} = C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(1+u'^2) = C_1}$$

Gauname pirmosios eilės diferencialinę lygtį (paprastąją dif lygtį).

Jį galima spręsti įvairiais būdais (išbandykite Matlab galimybes)

Mes panaudosime lygties suvedimą į parametrinę formą.

Atlikime pakeitimą

$$y' = \mathrm{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$y(t) = \frac{C_1}{1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)$$

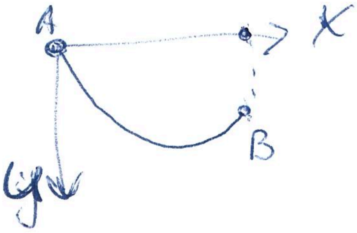
$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1\, 2 \sin t \cos t}{\mathrm{ctg}\, t} dt$$

$$= 2 C_1 \sin^2 t \, dt = C_1 (1 - \cos 2t)\, dt$$

$$x = C_1 \int (1 - \cos 2t)\, dt = C_1 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t\right) + C_2$$

$$= \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2$$

Pradiniu laiko momentu $t=0$



$x(0)=0 \quad y(0)=0$

$\Rightarrow \; C_2 = 0$

$$\boxed{x = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)}$$

Cikloidžių šeima, priklausanti nuo konstantos (parametro) C_1

C_1 randame iš antrosios sąlygos

$\boxed{y(x_2) = y_2}$ Dvi nežinomieji t ir C_1, dvi lygtys

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) &= x_2 \\ \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t) &= y_2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{2t - \sin 2t}{1 - \cos 2t} = \frac{x_2}{y_2}}$$ apskaičiuojame t.

Oilerio lygtis apibrėžia būtiną sąlygą, kad funkcija suteiktų lokalų funkcionalo ekstremumą.

Bet tokia stacionarioji ~~elementas~~ (funkcija) funkcionalo reikšmė nebūtinai yra ekstremumas.

Pav.

$$I(y)=\int_0^{\pi}\left(4y'^2(x)-25y^2(x)\right)dx$$

$$y(0)=1,\quad y(\pi)=2$$

Parašykime Oilerio lygtį

$$4y''+25y=0$$

$$\boxed{y(x)=C_1\cos\frac{5x}{2}+C_2\sin\frac{5x}{2}}$$

Panaudoję papildomas sąlygas, gausime f-ją

$$y = \cos\frac{5x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}$$

Nagrinėkime šios funkcijos aplinkę $\eta \in C_0^1(0,\pi)$. $(\eta(0)=0,\ \eta(\pi)=0)$

Skirtumas

$$I(y+\eta) - I(y) = \int_0^\pi \left[4(y'+\eta')^2 - 25(y+\eta)^2\right]dx$$

$$= \int_0^\pi \left[4(\eta')^2 - 25\eta^2\right]dx + 2\int_0^\pi \left[4y'\eta' - 25y\eta\right]dx$$

$$-2\int_0^\pi \overbrace{\left(4y'' + 25y\right)}^{0 \ \parallel}\eta\, dx$$

$$+ \underbrace{8y'\eta\Big|_0^\pi}_{0}$$

$$= \int_0^\pi \left[4(\eta')^2 - 25\eta^2\right]dx$$

Pasirinkime $\eta(x) = \frac{1}{n}\sin(mx)$, $n, m \in \mathbb{N}$.

$n \to \infty$, $\eta(x) \to 0$ $\boxed{|\eta| \le \varepsilon.}$

Gauname, kad skirtumas

$$I(\cancel{y}+\eta) - I(y) = \pi(4m^2-25)/2n^2$$

Taigi $I(y+\eta) < I(y)$, kai $m < 5/2$

ir $I(y+\eta) > I(y)$, kai $m > \frac{5}{2}$.

Taigi stacionarus funkcionalo taškas nebūtinai yra ekstremumo taškas