Paskaita 10.

Variacinio skaičiavimo pagalbiniai teiginiai ir metodikos.

Prisiminsime kai kuriuos paprastus matematinės analizės teorijos rezultatus.

$C_0^\infty(a,b)$ pažymėsime tokias funkcijas, kurios yra be galo daug kartų diferencijuojamos ir $\exists$ tokios $x=a$ ir $x=b$ aplinkos (atviros aibės), kad $\eta \in C_0^\infty(a,b)$ yra lygi 0 šiose aplinkose $\eta(x)=0$, jei $x \in$ kraštinių taškų nurodytomis aplinkomis.

Čia svarbu suprasti, kad mes užtenka nagrinėti tik „labai geras" glodžias funkcijas, išnykstančias prie srities $[a,b]$ galų. ! Nes tokios funkcijos dažnai tenkina ir kartais ir kai kurie jų mažiau mažiau tokių reikia atlikti

Pirmoji užduotis - kaip atpažinti f-ją, kuri tapatingai lygi 0

$$f(x) \equiv 0, \qquad x \in [a, b]$$

Kaip ir daugelyje taikomųjų uždavinių (kokybės tikrinimas, ligoniai, inžinerija), norime atlikti kuo mažiau testų.

<u>Lema 1</u> Tegul $f \in C[a,b]$ (yra tolydi f-ja, tik tolydžios f-jos atpažinimą siūlome naudodami pasiūlytą kriterijų) ir $\forall \eta \in C_0^\infty(a, b)$ (\eta Latex)

$$\int_a^b f(x)\,\eta(x)\,dx = 0 .$$

Tada $f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [a, b]$

◄ Tarkime priešingai, kad $\exists x \in [a, b]$, kad $f(x_0) > 0$ (atvejis $f(x_0) < 0$ yra nagrinėjamas analogiškai)

Kadangi $f(x)$ yra tolydi funkcija, tai $\exists$ x_0 aplinka $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ tokia, kad $f(x)>0$, $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. (Kaip modifikuotume šį samprotavimą, jei $x_0 = a$. ?) Imkime funkciją $\eta \in C_0^\infty(a,b)$: $\eta(x)>0$, $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ir $\eta(x)\equiv 0$, kai $x\in[a,b]\setminus(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Tada atlikime eksperimentą, testuojame funkciją $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,\eta(x) > 0,$$

bet ~~tai~~ prieštarauja lemos sąlygai. ▷

Dabar išplėsime testų aibę ir nagrinėsime f-jas, kurios yra tik tolydžiai diferencijuojamos

$$\eta \in C^1(a,b), \quad \eta(a)=0, \quad \eta(b)=0$$

(apie f-jų išvestinių reikšmes intervalo galuose jau nieko nesakome)

Lemma 2. Tarkime, kad $f \in C[a,b]$

ir
$$\int_a^b f(x)\,\eta'(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in C^1(a,b),$$
$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (\eta \in C_0^1(a,b))$$

Tada $f(x)$ yra konstanta. ▽

◁ Sukonstruokime $f(x)$ reikšmių vidurkį

$$C = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Tada šio vidurkio atveju

$$\int_a^b (f(x) - C)\,dx = 0$$

Nagrinėkime f-ją $\quad \eta(x) = \int_a^x (f(t) - C)\,dt.$

Akivaizdu, kad $\eta(a) = 0$, $\eta(b) = 0$
o jos išvestinė

$$\eta'(x) = f(x) - C \quad \rightarrow \text{tolydi f-ja.}$$

Taigi ~~$\eta(x)$~~ $\eta(x)$ gali būti panaudota, kaip testo funkcija

$$(1) \quad \int_a^b f(x)\,\big(f(x)-C\big)\,dx = 0. \quad \left(\text{iš lemos sąlygos}\right)$$

Imkime lygybę

$$\int_a^b \big(f(x)-C\big)\,dx = 0 \quad ,$$

padauginkime iš $(-C)$ ir pridėkime prie (1) lygybės, tada gauname, kad

$$\int_a^b \big(f(x)-C\big)^2\,dx = 0.$$

Tačiau tokia lygybė yra galima tik tada, kai $f(x) \equiv C, \; \forall x \in [a, b]$. ▶

Dabar jau galime įrodyti svarbiausią mūsų pagalbinį teiginį.

<u>Lema 3</u>. Tegul f ir g yra tolydžios segmente $[a,b]$ f-jos: $f, g \in C[a,b]$ ir $\forall \eta \in C^1(a,b)$, $\eta(a)=0$, $\eta(b)=0$ teisinga lygybė

$$\int_a^b \left(g(x)\eta(x) + f(x)\eta'(x) \right) dx = 0 , \qquad (2)$$

tada $f \in C^1(a,b)$ ir $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

(Taigi toks sąryšis (2) negali būti teisingas $\forall \eta$, jeigu f ir g nėra susietos lemoje pateiktu sąryšiu (griežtesnės apribos :-))

◄ Pažymėkime $w(x) = \int_a^x g(t)\,dt$

Prisiminkime integravimo dalimis sąryšį

$$\int_a^b u'v\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b uv'\,dx$$

Tada gauname

$$\int_a^b w\eta'\,dx = w\eta\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\eta(x)\,dx$$

$$= -\int_a^b g(x)\eta(x)\,dx$$

Nagrinėkime (2) tapatybę, ją galime perrašyti taip:

$$\int_a^b \Big(f(x) - w(x)\Big)\eta'(x)\,dx = 0$$
$$\forall \eta \in C_0^1(a,b).$$

Iš įrodytos Lemos 2 gauname, kad

$$f(x) - w(x) = C \text{ - konstanta}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + C.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f'(x) = g(x)}$$

Būtinoji ekstremumo sąlyga

Imkime ~~aibę~~ sritį $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tegu l yra glodi kreivė, gulinti srityje Ω:

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \quad \begin{array}{l} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta. \end{array}$$

Tada $\forall x \in [a, b]$ taškas $(x, y(x)) \in \Omega$.

Taip pat tarsim, kad $y(x)$ yra diferencijuojama. Tokių f-jų aibę žymėsime S.

Nagrinėkime f-ją $F(x, y, y') \in C(\Omega \times \mathbb{R})$.
(f-ja tolydi pagal visus 3 kintamuosius srityje $\Omega \times \mathbb{R}$.

Rasime būtinas sąlygas, kad funkcionalas

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

f-ja $y = y(x)$ suteiktų ekstremalią (mažiausią ar didžiausią) reikšmę (globalus ekstremumas).

$$I(y) \leq I(\tilde{y}), \forall \tilde{y} \in S.$$

$$(\text{arba} \quad I(y) \geq I(\tilde{y}), \forall \tilde{y} \in S).$$

Globalaus ekstremumo radimo uždav. yra sprendžiamas (prisimindami f-jos minimizavimo uždavinį), surandant lokalius ekstremumus (tik kažkurioje sprendinio aplinkoje), o paskui išrenkant mažiausią (didžiausią) lokaliųjų ekstremumo reikšmę.

Todėl apibrėšime dviejų tipų aplinkas.

Ap. Stipri aplinka (pakankamai plati aibė)

Imkime $\varepsilon > 0$, tada $y(x)$ aplinka

$$S_\varepsilon(y) = \left\{ \tilde{y} \in S : \max_{a \leq x \leq b} |y - \tilde{y}| \leq \varepsilon \right\}.$$

Ap. Silpna aplinka (siauresnė aibė!)

$$S_{\varepsilon,1}(y) = \left\{ \tilde{y} \in S : \max_{a \leq x \leq b} |y - \tilde{y}| + \max_{a \leq x \leq b} |y' - \tilde{y}'| \leq \varepsilon \right\}$$

Svarbu, kad aiškiai suprastume būtinųjų sąlygų grandinę:

Būtinoji silpnojo lokaliojo ekstremumo sąlyga yra ir stipriojo lokaliojo ekstremumo sąlyga.

Būtinoji stipriojo lokaliojo ekstremumo sąlyga yra ir globaliojo ekstremumo būtinoji sąlyga.

Todėl ~~toliau~~ ieškosime silpnojo lokaliojo ekstremumo sąlygų (būtinųjų) Jos yra ir globaliojo ekstremumo sąlygos (būtinosios).

! Pakankamosios sąlygos yra papildomos f-jos $f(x)$ ekstremumo, pvz. 1) $f'(x_0)=0$ 2) $f''(x_0)>0$.

Tarkime, kad $y \in S$ ir suteikia funkcionalui $I(y)$ & silpnąjį lokalųjį ekstremumą.

Imkime $\eta \in C^1(a,b)$ ir nagrinėkime $y + \varepsilon\eta \in S_{\varepsilon,1}(\overset{*}{y})$ (iš silpnosios aplinkos).

Tada (minimumui).

$$I(y) \le I(y + \varepsilon\eta).$$

Pažymėkime f-ją ε-atžvilgiu

$$\Phi(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\eta).$$

Funkcijos ekstremumo būtinoji sąlyga

$$\boxed{\Phi'(0) = 0}$$

(nes y - yra ekstremumą suteikianti f-ja).

Skaičiuokime šią išvestinę pagal apibrėžimą

$$\Phi'(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(y+\varepsilon\eta) - I(y)}{\varepsilon}$$

$$= \int_a^b \left[F'_y(x,y,y')\eta(x) + F'_{y'}(x,y,y')\eta'(x)\right]dx = 0$$

$$\forall \eta \in C_0^1(a,b)$$

$\boxed{F_y = F_y'}$ įsmėjin

Tada iš Lemos 3 gauname, kad

$$\boxed{\frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') = F_y(x, y, y').}$$

Ši lygtis vadinama Oilerio l. (diferencialine forma)

Suintegravę ją pagal x gauname tos pačios lygties integralinę formą

$$F_{y'}(x, y, y') = \int_a^x F_y(x, y, y'(t))\, dt + C.$$

Pav. 1 Vertikaliai išmesto materialaus taško veikimo integralas

$$I(y) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m (y')^2 - m g y\right) dt \qquad t_1 = 0$$

Eulerio (Oilerio) lygtis $\qquad y(0) = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} m \cdot 2 y'\right) = -mg \qquad y'(0) = v$$

$$m y'' = -mg \, . \qquad \left(\begin{array}{c} \text{Niutono dėsnis} \\ m y'' = F, \ F = -mg \end{array} \right).$$

$$y' = -gt + v \qquad (y'(0) = v)$$

$$\boxed{y = -\frac{gt^2}{2} + vt} \qquad (y(0) = 0.).$$

$$y'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_0 = \frac{v}{g}}$$

$$y_{max}(t_0) = \frac{v^2}{g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}.$$

Materialus taškas vėl pasiekia žemę

$$v t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = 0. \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = \frac{2V}{g}}$$

Trajektorija parabolė.