7 Tiesinis programavimas ekonomikoje. Grafinis tiesinio programavimo uždavinių sprendimo būdas

Nagrinėsime tiesinio programavimo uždavinį, kurį sudaro apribojimų sistema ir tikslo funkcija. Reikia rasti tokias kintamųjų $x_1, x_2, ..., x_n$ reikšmes, su kuriomis tikslo funkcija $F(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ įgyja didžiausią (max) arba mažiausią (min) reikšmę, kai tenkinama apribojimų sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ .... & & ..... & & ... & & ...... & & ...., \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \\ x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, ... & & , x_n \geq 0. \end{cases}$$

Čia $a_{ij}, \quad b_i, \quad p_j \quad (i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n)$ – realieji skaičiai.

Apribojimų sistemoje vietoje lygybių gali būti ir nelygybės. Be to, didžiausios tikslo funkcijos $F(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ reikšmės – maksimumo – paieškos uždavinys gali būti keičiamas funkcijos $Q(x_1, x_2, ..., x_n) = -F(x_1, x_2, ..., x_n) = (-p_1)x_1 + (-p_2)x_2 + ... + (-p_n)x_n$ mažiausios reikšmės – minimumo – paieškos uždaviniu. Apribojimų sistema lieka nepakitusi.

Jei tiesinio programavimo uždavinio apribojimų sistemos koeficientų matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

rangas lygus r, tai $(n - r)$ nežinomųjų yra laisvieji. Tais atvejais, kai laisvųjų nežinomųjų skaičius lygus 1 arba 2, tiesinio programavimo uždavinys gali būti sprendžiamas grafiškai. Kitais atvejais tenka taikyti kitus problemos sprendimo metodus.

7.1 Apibrėžimas. Apribojimų sistemos sprendinių aibė vadinama tiesinio programavimo uždavinio leistinąja aibe.

7.2 Apibrėžimas. Tiesinio programavimo uždavinio leistinosios aibės taškas, kuriame tikslo funkcija įgyja didžiausią (mažiausią) reikšmę leistinojoje srityje, vadinamas optimaliu tašku. Jei įgyjama didžiausia reikšmė – maksimumo, jei mažiausia – minimumo tašku. Funkcijos reikšmės, apskaičiuotos šiuose taškuose, atitinkamai vadinamos maksimaliomis arba minimaliomis.

Norint nustatyti grafiškai tiesinės funkcijos optimalius taškus yra brėžiamos tiesės, kurių taškuose tikslo funkcija įgyja vienodas reikšmes. Tai – lygio tiesės.

7.3 Apibrėžimas. Tiesė, turinti pavidalą $F(x_1, x_2) = C$, čia $F(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$, o C – konstanta, vadinama lygio tiese.

Nagrinėdami trijų kintamųjų funkcijas, turime lygio paviršius trimatėje erdvėje ir pan.

Apibendrindami pateiktą informaciją, grafinį tiesinio programavimo uždavinio sprendimą galime išskaidyti į tokius svarbesnius etapus:

I. Nustatomas apribojimų sistemos koeficientų matricos rangas. Jei laisvųjų nežinomųjų skaičius neviršyja 2, tai uždavinys pakeičiamas jam ekvivalenčiu uždaviniu, kuriame kintamųjų skaičius ≤ 2. Priešingu atveju grafinis sprendimo būdas nėra tinkamas.

II. Koordinačių plokštumoje pavaizduojama uždavinio sprendinių leistinoji aibė.

III. Nubraižomos kelios lygio tiesės ir pažymima tikslo funkcijos didėjimo kryptis. Jei tikslo funkcijos pavidalas yra $F(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$, tai jos didėjimo kryptį nustato vektorius $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2)$.

IV. Leistinojoje aibėje randamas optimalus taškas.

Gali pasirodyti, kad grafinis tiesinio programavimo uždavinio sprendimo būdas yra sudėtingas, nes neaišku, kaip nustatomas optimalus taškas. Nejaugi teks skaičiuoti tikslo funkcijos reikšmes visuose leistinosios aibės taškuose ir iš gautų reikšmių išrinti pačią mažiausią (didžiausią) reikšmę? Tikrai ne.

Spręsdami grafiškai tiesinio programavimo uždavinį, turime nubrėžti kelias lygio tieses su skirtingomis C reikšmėmis. Jei didesnes C reikšmes atitinkanti tiesė tolsta vektoriaus $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2)$ kryptimi, tai didžiausią reikšmę tikslo funkcija įgis leistinosios aibės taške, kurį gausime bet kurią lygio tiesę lygiagrečiu postūmiu perkeldami vektoriaus $\overrightarrow{p}$ kryptimi į tokią padėtį, kad ji liestų leistinosios aibės kraštą. Mažiausią reikšmę tikslo funkcija įgis taške, kurį gausime bet kurią lygio tiesę lygiagrečiu postūmiu perkeldami vektoriaus $-\overrightarrow{p}$ kryptimi.