6 Leontjevo modelis

Nagrinėsime ekonominės sistemos balanso uždavinį, t. y. domėsimes kelių įmonių veikla.

6.1 Apibrėžimas. Tarkime, kad turime lentelę, kurioje atsispindi n pramonės šakų sąnaudų ir gamybos ryšys (vienam produkcijos vienetui):

Produkcija	Sąnaudos			
	Pramonės šaka P_1	Pramonės šaka P_2	...	Pramonės šaka P_n
Pramonės šaka P_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
Pramonės šaka P_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
Pramonės šaka P_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

Tokia lentelė vadinama technologine lentele. Šioje lentelėje dydžiai $a_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$ yra produkcijos P_i kiekis, kurio reikia produkcijos P_j vienam kiekio vienetui pagaminti. Jie vadinami gamybos technologiniais koeficientais, o matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

gamybos technologine matrica.

Lentelėje matyti, kad kiekviena pramonės šaka gamindama produkciją naudoja kitų pramonės šakų (nebūtinai visų) ir savo pagamintą produkciją. Gaminamos produkcijos kiekį nustato paklausa. Tarkime, kad produkcijos paklausą nustato vektorius

$$P = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Tai reiškia, kad produkcijos P_1 paklausa yra c_1, produkcijos P_2 – c_2 ir t. t., produkcijos P_n – c_n, $c_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ..., n$. Tarkime, kad bendroji P_1 pramonės šakos produkcija yra x_1, P_2 pramonės šakos – x_2 ir t. t. P_n pramonės šakos – x_n.

6.2 Apibrėžimas. Vektorius $(x_1, x_2, ..., x_n)$, nustatantis planuojamus gaminti produkcijos kiekius, vadinamas gamybos planu.

Naudodamiesi pateikta gamybos ir sąnaudų lentele, nustatome kiekvienos pramonės šakos technologines sąnaudas:
P_1 pramonės šakos sąnaudos yra $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$,
P_2 pramonės šakos – $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$ ir t. t.
P_n pramonės šakos – $a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n$.
Tuomet produkcijos kiekis, kuris pateks į rinką, yra:
P_1 pramonės šakos pasiūla – $x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)$,
P_2 pramonės šakos – $x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)$ ir t. t.
P_n pramonės šakos pasiūla– $x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)$.
Svarbu, kad pasiūla – gaminamos produkcijos kiekis – tenkintų tos produkcijos paklausą.

Ekonominės sistemos balanso uždavinys: suplanuoti gamybą taip, kad produkcijos užtektų gamybos poreikiams ir vartotojams.
Taigi turime ekonominės sistemos balansą aprašančią tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) = c_1, \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n) = c_n, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n = c_1, \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - ... - a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... + (1 - a_{nn})x_n = c_n. \end{cases}$$

6.3 Apibrėžimas. Ekonominės sistemos balanso matematinis modelis yra tokia tiesinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n = c_1, \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - ... - a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... + (1 - a_{nn})x_n = c_n. \end{cases}$$

Šis modelis vadinamas Leontjevo modeliu. Jį galime užrašyti matricine lygtimi

$$(E_n - A)X = P.$$

6.4 Apibrėžimas. Bet kuris neneigiamas ekonominės sistemos balansą nustatančios tiesinių lygčių sistemos sprendinys vadinamas subalansuotu gamybos planu.

Vadinasi, norėdami rasti subalansuotą gamybos planą, turime spręsti atitinkamą tiesinių lygčių sistemą ir analizuoti gautus jos sprendinius. Visos gautos nežinomųjų reikšmės turi būti neneigiamos.

6.5 Apibrėžimas. Ekonominė sistema vadinama produktyvia, jei ji gali patenkinti bet kokią paklausą.

6.1 Teorema. *Leontjevo modelio ekonominė sistema su technologine matrica A yra produktyvi tada ir tik tada, kai matrica $(E_n - A)^{-1}$ neturi neigiamų elementų.*