2 Vienmatis atvejis

2.1 Sprendinio egzistavimas ir vienatis

2.1 Teorema. *Jei pradinio uždavinio*

$$x' = f(x),\ x(0) = x_0$$

dešinės pusės funkcija $f(x)$ kartu su savo išvestine $f'(x)$ yra tolydžiosios Ox ašies atvirame intervale R, o $x_0 \in R$, tai tuomet suformuluotas pradinis uždavinys laiko intervale $(-\tau, \tau)$ arti taško $t = 0$ turi vienintelį sprendinį $x = x(t)$.

Mes nagrinėsime tik tuos atvejus, kai sprendinys egzistuoja ir yra vienintelis.

Taip pat turime pastebėti, kad pirmosios eilės dinaminėse sistemose yra negalimos sprendinių osciliacijos, t. y. diferencialinė lygtis neturi periodinių sprendinių.

2.2 Pirmosios eilės dinaminių sistemų sprendimas skaitiniais metodais

Kaip pastebėjome ankstesnėse paskaitose, ne visos pirmosios eilės dinaminės sistemos gali būti išsprendžiamos klasikiniais metodais, t. y. ne visada pavyksta gauti jų sprendinių analizines išraiškas. Tais atvejais, kai dinaminė sistema negali būti išspręsta analiziškai, yra taikomi diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai. Priklausomai nuo to, kurią skaitinio integravimo formulę pasirenkame, galime gauti skirtingo tikslumo skaitinius diferencialinių lygčių sprendimo metodus. Kai integralą skaičiuojame taikydami kairiųjų arba dešiniųjų stačiakampių formules, gauname pirmosios tikslumo eilės metodus: išreikštinį ir neišreikštinį Eulerio metodus. Aproksimuodami integralą trapecijų formule, sudarome antrosios tikslumo eilės simetrinį Eulerio metodą. Siekdami sudaryti aukštesnės tikslumo eilės išreikštinį metodą, simetrinį Eulerio metodą modifikuojame ir sudarome prediktoriaus – korektoriaus metodą (antrosios tikslumo eilės), kuris paskatina ieškoti kitų panašios struktūros, tačiau aukštesnės tikslumo eilės, metodų. Tokiu būdu yra sudaromi ir taikymuose plačiai naudojami Rungės – Kutos metodai. Populiariausi yra trečiosios ir ketvirtosios aproksimacijos tikslumo eilės metodai, sudaryti atitinkamai iš trijų arba keturių pakopų.

Pateiksime skaitinių metodų formules pritaikytas pirmosios eilės autonominėms dinaminėms sistemoms

$$x' = f(x),\ x(0) = x_0, \text{kai } t \in [0, T]$$

spręsti:

- Išreikštinis Eulerio metodas

$$x_{i+1} = x_i + \tau\ f(x_i).$$

- Neišreikštinis Eulerio metodas

$$x_{i+1} = x_i + \tau\ f(x_{i+1}).$$

- Simetrinis Eulerio metodas

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\tau}{2}\ \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).$$

- Prediktoriaus – korektoriaus metodas

$$\begin{aligned}
&K_1 = f(x_i), \\
&K_2 = f(x_i + \tau\ K_1), \\
&x_{i+1} = x_i + \tfrac{\tau}{2}\ (K_1 + K_2)\,.
\end{aligned}$$

- m – pakopiai Rungės – Kutos metodai

$$\begin{aligned}
&K_1 = f(x_i), \\
&K_l = f(x_i + \tau\ \sum_{i=1}^{l-1} b_{li} K_i),\ l = 2, 3, ..., m, \\
&x_{i+1} = x_i + \tau\ \sum_{i=1}^{m} \sigma_i K_i.
\end{aligned}$$

Čia $\tau = \frac{T}{n}$, $t_i = t_0 + \tau\ i$, $x_i = x(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Skaičiuodami naudosime šiuos trijų pakopų (m=3) Rungės – Kutos metodo koeficientus: $b_{21} = 1/2$, $b_{31} = -1$, $b_{32} = 2$, $\sigma_1 = 1/6$, $\sigma_2 = 4/6$, $\sigma_3 = 1/6$. Taip pat pateikiame ir keturių pakopų (m=4) Rungės – Kutos metodo koeficientus: $b_{21} = 1/2$, $b_{31} = 0$, $b_{32} = 1/2$, $b_{41} = 0$, $b_{42} = 0$, $b_{43} = 1$, $\sigma_1 = 1/6$, $\sigma_2 = 1/3$, $\sigma_3 = 1/3$, $\sigma_4 = 1/6$.