9 Devintoji paskaita. TIESINĖS NEHOMOGENINĖS AUKŠTESNIŲJŲ EILIŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Tiesinės nehomogeninės DL su pastoviais koeficientais.
2. Atskirojo sprendinio sąvoka ir radimo būdai.
3. Tiesinės nehomogeninės DL su pastoviais koeficientais bendrojo sprendinio išraiška.

9.1 Tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais

Šiame skyrelyje nagrinėsime tiesines nehomogenines diferencialines lygtis

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \tag{9.1}$$

kuriose koeficientai p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ prie nežinomos funkcijos ir jos išvestinių yra realiosios konstantos. Šiame skyrelyje aptarsime atskirus atvejus, kai (9.1) diferencialinės lygties atskirąjį sprendinį Y galima rasti vadinamuoju neapibrėžtųjų koeficientų metodu. Pirmiausia, aptarsime (9.1) diferencialinės lygties bendrojo sprendinio išraišką tuo atveju, kai dešinės pusės funkcija yra kelių funkcijų suma, t. y.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x), \quad m \in N. \tag{9.2}$$

Tokiais atvejais bendrasis sprendinys užrašomas remiantis tokia teorema:

9.1 Teorema. *Jei* (9.1) *diferencialinės lygties dešinės pusės funkcija yra apibrėžiama* (9.2) *lygybe, tai tokios lygties bendrasis sprendinys yra funkcija*

$$y = y_h + Y_1 + Y_2 + ... + Y_m,$$

čia y_h – yra (9.1) *lygtį atitinkančios homogeninės lygties bendrasis sprendinys, o Y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ – nehomogeninių lygčių*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{9.3}$$

atskirieji sprendiniai.

Rasti nehomogeninę diferencialinę lygtį atitinkančios homogeninės lygties sprendinį jau mokame. Šis klausimas nagrinėtas ankstesniame skyrelyje. Dabar aptarsime tik paprasčiausius atvejus, kai 9.1 teoremoje minimi atskirieji gali būti nustatomi neapibrėžtųjų koeficientų metodu:

- Kai (9.3) diferencialinėje lygtyje

  $$f_i(x) = \mathrm{e}^{kx} P_l(x),$$

  čia $k \in R$, o $P_l(x)$ yra l-tojo laipsnio daugianaris ($l \geqslant 0$). Tada galimi du atvejai:

1) kai skaičius k nėra (9.3) diferencialinės lygties charakteringosios lygties šaknis, tai atskirasis sprendinys yra

$$Y_i = \mathrm{e}^{kx} Q_l(x), \tag{9.4}$$

čia $Q_l(x)$ – to paties laipsnio daugianaris kaip ir $P_l(x)$ su neapibrėžtaisiais koeficientais. Daugianario koeficientai nustatomi (9.4) atskirąjį sprendinį įrašant į (9.3) diferencialinę lygtį su atitinkama dešinės pusės funkcija $f_i(x)$.

2) kai skaičius k yra α kartotinumo (9.3) diferencialinės lygties charakteringosios lygties šaknis, tai atskirasis sprendinys yra

$$Y_i = x^\alpha \, \mathrm{e}^{kx} Q_l(x), \tag{9.5}$$

čia $Q_l(x)$ – to paties laipsnio daugianaris kaip ir $P_l(x)$ su neapibrėžtaisiais koeficientais. Daugianario koeficientai nustatomi (9.5) atskirąjį sprendinį įrašant į (9.3) diferencialinę lygtį su atitinkama dešinės pusės funkcija $f_i(x)$.

- Kai (9.3) diferencialinėje lygtyje

$$f_i(x) = \mathrm{e}^{ax} \left(P_l(x) \cos bx + S_r(x) \sin bx \right),$$

čia $P_l(x)$ ir $S_r(x)$ – yra atitinkamai l-tojo ir r-tojo laipsnio daugianariai ($l \geqslant 0$, $r \geqslant 0$), o $a, b \in R$. Tuomet galimi du atvejai:

1) kai skaičius $a \pm bi$ nėra (9.3) diferencialinės lygties charakteringosios lygties šaknis, tai atskirasis sprendinys yra

$$Y_i = \mathrm{e}^{ax} \left(R_q(x) \cos bx + T_q(x) \sin bx \right), \tag{9.6}$$

čia $R_q(x)$ ir $T_q(x)$ yra q laipsnio ($q = \max\{l, r\}$) daugianariai su neapibrėžtaisiais koeficientais. Daugianarių koeficientai nustatomi (9.6) atskirąjį sprendinį įrašant į (9.3) diferencialinę lygtį su atitinkama dešinės pusės funkcija $f_i(x)$.

2) kai skaičius $a \pm bi$ yra α kartotinumo (9.3) diferencialinės lygties charakteringosios lygties šaknis, tai atskirasis sprendinys yra

$$Y_i = x^\alpha \, \mathrm{e}^{ax} \left(R_q(x) \cos bx + T_q(x) \sin bx \right), \tag{9.7}$$

čia $R_q(x)$ ir $T_q(x)$ yra q laipsnio ($q = \max\{l, r\}$) daugianariai su neapibrėžtaisiais koeficientais. Daugianarių koeficientai nustatomi (9.7) atskirąjį sprendinį įrašant į (9.3) diferencialinę lygtį su atitinkama dešinės pusės funkcija $f_i(x)$.