6 Šeštoji paskaita. PIRMOSIOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS, NEIŠSPRĘSTOS IŠVESTINĖS ATŽVILGIU. AUKŠTESNIŲJŲ EILIŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS

1. Diferencialinės lygtys, užrašomos kaip daugianariai funkcijos išvestinės atžvilgiu.
2. Diferencialinės lygtys be laisvojo kintamojo.
3. Diferencialinės lygtys, kurių išraiškoje nėra ieškomos funkcijos.
4. Lygtys, kuriose galima išreikšti laisvąjį kintamąjį arba nežinomą funkciją.
5. Lagranžo ir Klero lygtys.
6. Aukštesniųjų eilių diferencialinės lygtys.
7. Lygtys, kurių eilę galima sumažinti.

6.1 Pirmosios eilės diferencialinės lygtys, neišspręstos išvestinės atžvilgiu

Ankstesniuose skyreliuose nagrinėjome pirmosios eilės diferencialines lygtis, kurios buvo išspręstos (arba jas galima išspręsti) išvestinės atžvilgiu. Šiame skyrelyje nagrinėsime diferencialines lygtis, kuriose laisvąjį kintamąjį x, jo funkciją $y(x)$ ir šios funkcijos išvestinę $y'(x)$ sieja kokia nors funkcijinė priklausomybė, t. y. domėsimės lygtimis, turinčiomis pavidalą:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{6.1}$$

- Nagrinėkime (6.1) diferencialines lygtis, kurių kairės pusės funkcija yra n-tojo laipsnio daugianaris y' atžvilgiu:

  $$A_1(x,y)\,(y')^n + A_2(x,y)\,(y')^{n-1} + ... + A_{n-1}(x,y)y' + A_n(x,y) = 0,$$

  čia $A_1(x,y) \not\equiv 0$.

  Domėsimės tik tokiomis diferencialinėmis lygtimis, kuriose tiek laisvasis kintamasis, tiek jo funkcija įgyja realiąsias reikšmes. Kaip žinome iš tiesinės algebros kurso, bendru atveju toks daugianaris kiekvienai porai (x,y) turi n šaknų. Realiosios šaknys, remiantis teorema apie neišreikštines funkcijas (kai $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$), yra tolydžiosios kintamųjų x ir y funkcijos ir turi baigtinę išvestinę $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$. Tegul spręsdami šią algebrinę lygtį mes gausime n skirtingų realiųjų šaknų, t. y.

  $$y' = f_1(x,y), y' = f_2(x,y), ..., y' = f_n(x,y).$$

  Kiekviena iš šių lygčių yra pirmosios eilės diferencialinė lygtis, išspręsta išvestinės atžvilgiu. Tokių lygčių sprendimas aptartas ankstesniuose skyreliuose. Pažymėkime jų sprendinius:

  $$\Phi_1(x,y,C_1) = 0, \Phi_2(x,y,C_2) = 0, ..., \Phi_n(x,y,C_n) = 0.$$

Tada nagrinėjamos diferencialinės lygties bendrasis integralas gaunamas sudauginus visus šiuos sprendinius, kai $C_1 = C_2 = ... = C_n = C$:

$$\Phi_1(x, y, C)\Phi_2(x, y, C)...\Phi_n(x, y, C) = 0.$$

- Nagrinėkime (6.1) diferencialines lygtis, kuriose nėra laisvojo kintamojo x, o funkciją y galima parašyti išreikštai:
$$y = \phi(y').$$
Tokias diferencialines lygtis sprendžiame naudodami keitinį
$$y' = p.$$
Naudodami šį keitinį, gauname parametrinę funkcijos išraišką $y = \phi(p)$, o po to iš keitinio surandame ir kintamojo x išraišką:
$$dx = \frac{dy}{p}$$
arba
$$x = \int \frac{dy}{p} + C = \int \frac{\phi'(p)}{p} dp + C.$$
Tokiu būdu gavome parametrinę diferencialinės lygties, kurioje nėra laisvojo kintamojo x, bendrojo sprendinio išraišką:
$$\begin{cases} x = \int \frac{\phi'(p)}{p} dp + C, \\ y = \phi(p). \end{cases}$$

- Analogiškai nagrinėjamos ir diferencialinės lygtys, kuriose nėra funkcijos y, o x galima parašyti išreikštai:
$$x = \psi(y').$$
Tokias diferencialines lygtis sprendžiame naudodami tą patį keitinį
$$y' = p,$$
kaip ir anksčiau. Tada $x = \psi(p)$ ir iš keitinio surandame funkciją y:
$$dy = pdx$$
arba
$$y = \int pdx + C = \int p\psi'(p)dp + C.$$
Turime parametrinę diferencialinės lygties, į kurią neįeina funkcija y, bendrojo sprendinio išraišką:
$$\begin{cases} x = \psi(p), \\ y = \int p\psi'(p)dp + C. \end{cases}$$

- Nagrinėkime (6.1) diferencialines lygtis, neišspręstas išvestinės atžvilgiu, kuriose galima išreikšti x arba y:

$$x = \phi(y, y')\,(y = \psi(x, y'))\,.$$

Šiais atvejais taip pat naudojame keitinį

$$y' = p.$$

Nagrinėkime diferencialines lygtis, kuriose galima išreikšti x. Naudodami keitinį, turime

$$x = \phi(y, p).$$

Šią lygybę diferencijuojame pagal y ir gauname:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

Įrašę keitinį, gauname bendrąjį sprendinį, parašytą parametriškai:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} + \dfrac{\partial\phi}{\partial p}\dfrac{dp}{dy}, \\ x = \phi(y, p). \end{cases}$$

Analogiškai sprendžiamos diferencialinės lygtys, kuriose galima išreikšti y. Tik šiuo atveju, diferencijuojame pagal x.

- Lagranžo lygtys. Tai grupė lygčių, kurias diferencijuodami visuomet gauname lygtį, kuri integruojama kvadratūromis (integralai išreiškiami elementariosiosmis funkcijomis). Šios grupės lygtys yra tiesinės kintamojo x ir funkcijos y atžvilgiu, t. y.

$$A(y')y + B(y')x = C(y').$$

Tarę, kad $A(y') \neq 0$, lygtį išsprendžiame y atžvilgiu:

$$y = x\phi(y') + \psi(y'), \tag{6.2}$$

čia $\phi(y') = -\dfrac{B(y')}{A(y')}$, o $\phi(y') \not\equiv y'$ (atvejį, kai $\phi(y') \equiv y'$, aptarsime vėliau), $\psi(y') = \dfrac{C(y')}{A(y')}$. Pažymėkime

$$y' = p. \tag{6.3}$$

Tada (6.2) lygtį perrašome taip:

$$y = x\phi(p) + \psi(p).$$

Gautąją lygybę diferencijuojame pagal x:

$$\frac{dy}{dx} = \phi(p) + x\phi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Prisiminę (6.3) pažymėjimą, gauname lygtį:

$$p = \phi(p) + (x\phi'(p) + \psi'(p))\,\frac{dp}{dx}.$$

Laikydami, kad šioje lygtyje x yra funkcija, o p – kintamasis, turime pirmos eilės tiesinę diferencialinę lygtį:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\phi'(p)}{\phi(p)-p}x=-\frac{\psi'(p)}{\phi(p)-p},$$

kurios sprendinį $\Phi(x,p,C)=0$ galime rasti taikydami vieną iš būdų, aprašytų 2.4 skyrelyje. Todėl bendrasis (6.2) Lagranžo lygties sprendinys yra toks:

$$\begin{cases}\Phi(x,p,C)=0,\\ y=x\phi(p)+\psi(p).\end{cases}$$

- Klero lygtys. Tai – atskiras (6.2) Lagranžo lygčių atvejis, kuriose $\phi(y')\equiv y'$. Tuomet bendrasis Klero lygties pavidalas –

$$y=xy'+\psi(y'). \tag{6.4}$$

Kadangi Klero lygtys – atskiras Lagranžo lygčių atvejis, tai jų sprendimo būdas yra analogiškas (naudojamas (6.3) keitinys, o po to (6.4) lygtis diferencijuojama pagal x) Lagranžo lygčių sprendimui ir gaunama lygtis:

$$p=p+(x+\psi'(p))\,\frac{dp}{dx}.$$

Ją pertvarkę, turime:

$$(x+\psi'(p))\,\frac{dp}{dx}=0.$$

Nagrinėdami kairės pusės duaginamuosius, gauname:

$$\frac{dp}{dx}=0\Rightarrow p=C,$$

$$x+\psi'(p)=0\Rightarrow x=-\psi'(p).$$

(6.3) keitinį statydami į (6.4) diferencialinę lygtį ir prijungę gautus rezultatus, turime bendrąjį

$$y=xC+\psi(C)$$

ir atskirąjį (nepriklauso nuo konstantos)

$$\begin{cases}x=-\psi'(p),\\ y=-p\psi'(p)+\psi(p)\end{cases}$$

Klero diferencialinės lygties sprendinius. Bendrasis sprendinys yra tiesių šeima, o atskirojo sprendinio negalime gauti iš bendrojo sprendinio su jokia konstanta C. Todėl šis sprendinys – ypatingasis Klero lygties sprendinys.

6.2 Aukštesniųjų eilių diferencialinės lygtys

Šiame skyriuje kalbėsime apie aukštesniųjų eilių diferencialines lygtis, t. y. grįšime prie n-tosios eilės diferencialinės lygties bendrosios išraiškos

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ...y^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{6.5}$$

čia F – kintamąjį x, jo funkciją $y(x)$ ir šios funkcijos išvestines siejanti funkcija.

Kartais (6.5) diferencialinę lygtį mes galime išspręsti aukščiausios eilės išvestinės $y^{(n)}$ atžvilgiu, t. y.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{6.6}$$

Kai nagrinėdami (6.5) arba (6.6) diferencialines lygtis, turime papildomas sąlygas

$$x = x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', ..., y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)},$$

kurias turi tenkinti diferencialinės lygties sprendinys, tai sakome, kad sprendžiame pradinį arba Koši uždavinį.

6.1 Apibrėžimas. (6.5) diferencialinės lygties bendruoju sprendiniu vadinama funkcija

$$y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n),$$

kuri yra diferencialinės lygties sprendinys su bet kuriomis konstantų C_1, C_2, ... C_n reikšmėmis, o kiekvienam pradiniam uždaviniui galima surasti tokias konstantų reikšmes, kad funkcija $y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ tenkintų pradinio uždavinio sąlygas.

Jeigu diferencialinės lygties sprendinys užrašomas x, y ir konstantų $C_1, C_2, ..., C_n$ neišreikštine funkcija

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

tai jį vadiname (6.5) diferencialinės lygties bendruoju integralu.

6.2 Apibrėžimas. (6.5) diferencialinės lygties sprendinys, gautas iš bendrojo sprendinio (arba bendrojo integralo) su fiksuotomis konstantų $C_1, C_2, ..., C_n$ reikšmėmis yra vadinamas atskiruoju sprendiniu (arba atskiruoju integralu).

Toliau šiame skyriuje nagrinėsime tik atskirus (6.5) diferencialinės lygties atvejus.

6.2.1 Lygtys, kurių eilė gali būti sumažinta

Šiame skyrelyje išskirsime n-tosios eilės diferencialinių lygčių grupes, kurių eilę galima sumažinti, o po to spręsti integruojant.

- Lygtys, turinčios pavidalą

  $$y^{(n)} = f(x).$$

  Tokios lygtys sprendžiamos vadovaujantis aukštesniųjų eilių išvestinės apibrėžimu, t. y.

  $$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

  Tada gauname diferencialinę lygtį

  $$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x),$$

kurią integruodami turime

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Kadangi

$$y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},$$

tai, tęsdami procesą, randame

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) + C_2$$

ir t. t., kol apskaičiuojame

$$y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

- Lygtys, kuriose nėra funkcijos y arba laisvojo kintamojo x.

Pirmiausia aptarsime lygtis, kuriose nėra funkcijos y ir jos išvestinių y', y'', ..., $y^{(k-1)}$, t. y.

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ...y^{(n)}\right) = 0. \tag{6.7}$$

Pažymėję

$$y^{(k)} = z,$$

(6.7) diferencialinės lygties eilę sumažiname k kartų. Gautoji lygtis

$$F\left(x, z, z', ...z^{(n-k)}\right) = 0$$

bendru atveju gali būti neintegruojama kvadratūromis. Tačiau, jei pavyksta ją išspręsti ir surasti bendrąjį integralą

$$\Phi(x, z, C_1, C_2, ..., C_{n-k}) = 0,$$

vėliau tenka spręsti ankstesniame atvejyje aptartą diferencialinę lygtį:

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, ..., C_{n-k}) = 0,$$

kurią išsprendę ir gausime (6.7) diferencialinės lygties bendrąjį integralą.

Tuo atveju, kai lygtyje nėra x, turime

$$F\left(y, y', y'', ...y^{(n)}\right) = 0. \tag{6.8}$$

Tokios lygtys sprendžiamos įvedant naują funkciją $p = p(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Tuomet

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)}{dy}\frac{dy}{dx} = p\left(p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

ir t.t., o (6.8) lygtis pakeičiama lygtimi:

$$F_1\left(y, p, p', p'', ...p^{(n-1)}\right) = 0.$$

Jei pavyksta tokią lygtį išspręsti, tai turime jos bendrąjį integralą

$$\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Norint rasti (6.8) lygties bendrąjį integralą dar tenka spręsti pirmosios eilės diferencialinę lygtį:

$$\Phi\left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, C_2, ..., C_{n-1}\right) = 0.$$

- Kai (6.5) lygties kairės pusės funkcija $F\left(x, y, y', y'', ...y^{(n)}\right)$ yra kokios nors funkcijos $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ išvestinė pagal x, t. y., jeigu

$$F\left(x, y, y', y'', ...y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

tai tuomet turime, kad

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C.$$

Gautosios lygties eilė yra vienu vienetu žemesnė už pradinės diferencialinės lygties eilę. Vadinasi, ir šiuo atveju pavyko sumažinti diferencialinės lygties eilę.

- (6.5) diferencialinės lygties eilę galima sumažinti, jei kairės pusės funkcija yra homogeninė [14]:

1) jei F yra homogeninė $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ atžvilgiu, t. y. visiems t

$$F\left(x, ty, ty', ty'', ...ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', y'', ...y^{(n)}\right),$$

tai lygties eilę galime sumažinti vienu vienetu naudodami keitinį

$$y = \mathrm{e}^{\int z dx},$$

čia z – nauja nežinoma funkcija.

2) jei F – homogeninė $x, y, dx, dy, d^2y, ..., d^ny$ atžvilgiu, t. y. (6.5) diferencialinę lygtį galime perrašyti taip

$$\Phi\left(x, y, dx, dy, d^2y, ...d^ny\right) = 0,$$

kad su visais t galiotų lygybė

$$\Phi\left(tx, ty, tdx, tdy, td^2y, ...td^ny\right) = t^m\Phi\left(x, y, dx, dy, d^2y, ...d^ny\right).$$

Tokio pobūdžio lygties eilę sumažinsime vienu vienetu naudodami keitinį, kuriuo įvedami nauji kintamieji ξ ir z:

$$x = \mathrm{e}^{\xi}, y = z\,\mathrm{e}^{\xi}.$$