4 Ketvirtoji paskaita. LYGTYS, PERTVARKOMOS Į LYGTIS SU PILNAISIAIS DIFERENCIALAIS. TIESINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Lygtys, kurios gali būti suvestos į lygtis su pilnaisiais diferencialais.

2. Integruojantys daugikliai.

3. Tiesinės diferencialinės lygties apibrėžimas. Kanoninis pavidalas. Sprendinių savybės.

4. Tiesinių DL sprendimo būdai. Lagranžo metodas.

4.1 Lygtys, pertvarkomos į lygtis su pilnaisiais diferencialais

Lygtys

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{4.1}$$

kurių funkcijos $M(x,y)$ ir $N(x,y)$ kartu su savo dalinėmis išvestinėmis $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ yra apibrėžtos ir tolydžios kurioje nors vienajungėje plokštumos xOy srityje, bet

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

kai kuriais atvejais gali būti pertvarkomos į pilnųjų diferencialų lygtis. Tokiu atveju tenka spręsti papildomą uždavinį, t. y. nustatyti tokią funkciją $\mu = \mu(x,y)$, iš kurios padauginę (4.1) diferencialinę lygtį, gauname pilnųjų diferencialų lygtį

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0,$$

tenkinančią abi (3.1) teoremos sąlygas. Tada turi galioti lygybė

$$\frac{\partial\left(\mu M\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\mu N\right)}{\partial x},$$

čia $\mu = \mu(x,y)$, $M = M(x,y)$, $N = N(x,y)$. Funkcija $\mu = \mu(x,y)$ vadinama integruojančiuoju daugikliu.

Diferencijuodami skaitiklių sandaugas, gauname

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

arba

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{4.2}$$

Gautoji diferencialinė lygtis lengvai išsprendžiama tik tais atvejais, kai funkcija μ yra vieno kintamojo (x arba y) funkcija. Plačiau aprašysime tą atvejį, kai $\mu = \mu(y)$. Kai $\mu = \mu(x)$, integruojantį daugiklį skaitytojui siūlome nustatyti savarankiškai.

Kai $\mu = \mu(y)$, tai $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ ir iš (4.2) lygybės gauname, kad

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Tačiau μ yra tik vieno kintamojo funkcija, tai $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{d\mu(y)}{dy}$. Tada

$$M\frac{d\mu(y)}{dy} = \mu(y)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

arba

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}dy.$$

Iš čia integruodami randame, kad

$$\ln \mid \mu(y) \mid = \int \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}dy + \ln \mid C \mid$$

arba

$$\mu(y) = C\,\mathrm{e}^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy}.$$

Kadangi pakanka rasti nors vieną integruojantyjį daugiklį, tai

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy}. \tag{4.3}$$

Įrodėme teoremą:

4.1 Teorema. *Jei reiškinys*

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

nepriklauso nuo x, tai (4.1) *lygties integruojantysis daugiklis nustatomas* (4.3) *formule.*

Analogiškai galima įsitikinti, kad, jeigu reiškinys

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$$

nepriklauso nuo y, tai integruojantysis daugiklis nustatomas formule:

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}dx}.$$

4.2 Tiesinės diferencialinės lygtys

Šiame skyrelyje nagrinėsime pirmosios eilės tiesines diferencialines lygtis ir jų sprendimo būdus.

4.1 Apibrėžimas. Diferencialinė lygtis, kuri yra tiesinė ieškomosios funkcijos ir jos išvestinės atžvilgiu, vadinama pirmosios eilės tiesine diferencialine lygtimi. Bendrasis tokios lygties pavidalas:

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y + C(x) = 0,$$

čia $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – tolydžiosios kintamojo x funkcijos, o $y = y(x)$.

Jeigu tam tikrame argumento x kitimo intervale $A(x) \not\equiv 0$, tai tuomet tiesinė lygtis gali būti užrašoma taip:

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{4.4}$$

čia $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $p(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$, $f(x) = -\dfrac{C(x)}{A(x)}$. Atskiru atveju, kai $f(x) \equiv 0$, gautąją lygtį vadiname tiesine homogenine diferencialine lygtimi, kurios kintamuosius galime atskirti. Kadangi tokias lygtis esame išnagrinėję pirmajame šio skyriaus skyrelyje, tai čia apsiribosime tik (4.4) diferencialinių lygčių analize, kai $f(x) \not\equiv 0$. Pirmiausia paminėsime tuos atvejus, kai yra žinomas vienas arba du atskirieji (4.4) diferencialinės lygties sprendiniai.

Tarkime, kad $y_1 = y_1(x)$ yra atskirasis (4.4) diferencialinės lygties sprendinys. Bendrojo sprendinio ieškome pavidalu:

$$y = y_1 + z,$$

čia $z = z(x)$. Statydami sudarytąją y išraišką į (4.4) diferencialinę lygtį, turime:

$$y_1' + z' + p(x)y_1 + p(x)z = f(x). \tag{4.5}$$

Prisiminkime, kad y_1 yra atskirasis (4.4) diferencialinės lygties sprendinys, t. y. jį įrašę į lygtį gauname tapatybę:

$$y_1' + p(x)y_1 = f(x)$$

Tuomet iš (4.5) turime:

$$z' + p(x)z = 0. \tag{4.6}$$

O tai yra tiesinė homogeninė diferencialinė lygtis. Atskyrę kintamuosius, randame

$$z(x) = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx},$$

čia C – bet kuri konstanta. Tada bendrasis (4.4) diferencialinės lygties sprendinys:

$$y = y_1 + C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

Įrodėme teoremą:

4.2 Teorema. *Jei žinome vieną* (4.4) *tiesinės diferencialinės lygties atskirąjį sprendinį, tai jos bendrąjį sprendinį galime išreikšti atskirojo sprendinio ir atitinkamos tiesinės homogeninės diferencialinės lygties* (4.6) *sprendinio suma.*

4.3 Teorema. *Jei žinome du atskiruosius* (4.4) *tiesinės diferencialinės lygties sprendinius* y_1 *ir* y_2, *tai jos bendrąjį sprendinį galime parašyti taip:*

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1),$$

čia C *– bet kuri konstanta.*

Šios teoremos teisingumu skaitytojui siūlome įsitikinti savarankiškai.

Toliau aprašysime (4.4) tiesinės diferencialinės lygties sprendimo būdus, kai atskirieji sprendiniai nežinomi. Tiesinėms diferencialinėms lygtims spręsti gali būti taikomi šie metodai:

- Lagranžo (konstantos varijavimo),
- Bernulio (keitinys $y = uv$),
- Oilerio (integruojančiojo daugiklio).

Panagrinėkime kiekvieną iš jų.

Lagranžo metodas.Šį metodą sudaro du pagrindiniai žingsniai:

1) Sprendžiame tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį:

$$y' + p(x)y = 0.$$

Jos sprendinys yra

$$y = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

2) Darome prielaidą, kad $C = C(x)$ (todėl metodas ir vadinamas konstantos varijavimo metodu). Tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygties (4.4) sprendinio ieškome

$$y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} \tag{4.7}$$

pavidalo. Tada

$$y' = C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

Įrašę y ir y' išraiškas į (4.4) tiesinę diferencialinę lygtį gauname:

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Iš čia

$$C(x) = \int f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Funkciją $C(x)$ įrašome į (4.7), o bet kurią konstantą C_1 pažymime C ir turime bendrąjį (4.4) diferencialinės lygties sprendinį:

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$