13 Tryliktoji paskaita. Aukos – plėšrūno (Lotka – Voltera) matematinis modelis

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Aukos – plėšrūno matematinis modelis.

2. Modelio analizė.

13.1 Aukos – plėšrūno matematinis modelis

Gamtoje įvairios populiacijos nuolatos sąveikauja vienos su kitomis. Ne visada toks sambūvis yra taikus. Kad išgyventų tam tikra populiacija, reikalinga tinkama aplinka, pakankamas maisto kiekis ir pan.

Nagrinėkime dviejų populiacijų kovą dėl būvio aprašantį vadinamąjį aukos – plėšrūno modelį. Sakykime, kad gamtoje egzistuoja dvi glaudžiai sąveikaujančios populiacijos: aukos ir plėšrūnai. Plėšrūnai medžioja aukas. Šių populiacijų individų skaičius kinta bėgant laikui, t. y. populiacijų individų skaičius yra laiko funkcija. Pažymėkime $x(t)$ – aukų, o $y(t)$ – plėšrūnų skaičių laiko momentu t. Jei nebūtų plėšrūnų, tai aukų populiacija nuolatos didėtų. Tuo tarpu plėšrūnų populiacija neesant pakankamai aukų nyktų. Laikome, kad aukų populiacijos augimo greitis kiekvienu laiko momentu priklauso nuo aukų skaičiaus tuo laiko momentu (proporcingumo koeficientas $a > 0$), o populiacija mažėja greičiu proporcingu (proporcingumo koeficientas $p > 0$) aukų bei plėšrūnų populiacijų individų skaičių sandaugai tuo laiko momentu. Tuomet aukų populiacijos kitimą aprašanti diferencialinė lygtis yra:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - px(t)y(t). \tag{13.1}$$

Kadangi neesant aukų plėšrūnų populiacija pradėtų badauti ir nykti, tai kiekvienu laiko momentu šios populiacijos mažėjimo greitis yra proporcingas (proporcingumo koeficientas $b > 0$) populiacijos individų skaičiui tuo laiko momentu. Tačiau, kai yra aukų, populiacija auga greičiu proporcingu (proporcingumo koeficientas $q > 0$) aukų bei plėšrūnų populiacijų individų skaičių sandaugai tuo laiko momentu. Plėšrūnų populiacijos kitimą aprašanti diferencialinė lygtis yra:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -bx(t) + qx(t)y(t). \tag{13.2}$$

Kadangi šios dvi populiacijos sąveikauja tarpusavyje, tai jų sambūvį aprašo sudarytųjų diferencialinių lygčių (13.1) ir (13.2) sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t) - px(t)y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -bx(t) + qx(t)y(t). \end{cases} \tag{13.3}$$

Sudarytoji diferencialinių lygčių sistema vadinama aukos – plėšrūno matematiniu modeliu arba Lotka – Voltera modeliu. Pirmieji šį modelį pradėjo taikyti A. J. Lotka 1910 m. nagrinėdamas chemines reakcijas ir V. Voltera 1920 m. tirdamas ciklinę ryklių populiacijos kaitą Adrijos jūroje. Šis modelis taikomas ne tik biologijos, chemijos, bet ir ekonomikos teorijoje.

13.2 Aukos – plėšrūno modelio kokybinė analizė

Ne mažiau įdomus šis modelis ir matematiniu požiūriu. Nustatykime sudarytosios sistemos ramybės taškus ir nustatykime jų rūšį. Ramybės taškai randami sprendžiant lygčių sistemą:

$$\begin{cases} ax - pxy = 0, \\ -bx + qxy = 0. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendiniai yra taškai: $(0, 0)$ ir $(\frac{b}{q}, \frac{a}{p})$. Pirmojo ramybės taško prasmė yra labai aiški, t. y. jei abiejose populiacijose nėra individų, tai populiacijos bėgant laikui nekinta. Antrasis ramybės taškas apibūdina situaciją, kada nagrinėjamos dvi populiacijos pasiekia tokį individų skaičių, kuris nekinta ilgą laiko tarpą, t. y. tarp populiacijų nusistovi ilgalaikė pusiausvyra.

Norėdami išsiaiškinti šių dviejų ramybės taškų rūšį, turime atlikti sistemos (13.3) linearizaciją:

$$\begin{pmatrix} a - py & -px \\ qy & -b + qx \end{pmatrix}$$

Tirkime ramybės tašką $(0, 0)$. Matrica šiame taške yra

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Tuomet linearizuota sistema būtų užrašoma taip:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}(t)}{dt} = a\tilde{x}(t), \\ \dfrac{d\tilde{y}(t)}{dt} = -b\tilde{y}(t). \end{cases}$$

Šios sistemos charaketringoji lygtis yra:

$$(a - \lambda)(-b - \lambda) = 0,$$

kurios šaknys $\lambda_1 = a$ ir $\lambda_2 = -b$ yra realiosios ir skirtingų ženklų. Todėl taškas $(0, 0)$ yra balnas. Jis nėra stabilus ir nusako visišką abiejų populiacijų išnykimą.

Nagrinėkime antrąjį ramybės tašką $(\frac{b}{q}, \frac{a}{p})$. Šiame taške linearizacijos matrica užrašoma taip:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{pb}{q} \\ \frac{qa}{p} & 0 \end{pmatrix},$$

t. y. linearizuota sistema yra tokia:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}(t)}{dt} = -\dfrac{pb}{q}\tilde{y}(t), \\ \dfrac{d\tilde{y}(t)}{dt} = \dfrac{qa}{p}\tilde{x}(t). \end{cases}$$

Šios tiesinės sistemos charakteringoji lygtis

$$\lambda^2 - ab = 0$$

turi dvi menamas šaknis $\lambda_1 = -\sqrt{ab}i$ ir $\lambda_2 = \sqrt{ab}i$. Vadinasi ramybės taškas $(\frac{b}{q}, \frac{a}{p})$ yra sistemos stabilusis centras. Tai taškas, kuriame nusistovi abiejų populiacijų individų skaičius.