10 Dešimtoji paskaita. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Svarbiausios sąvokos.
2. Normalioji diferencialinių lygčių sistemos forma ir jos analizė.
3. Tiesinė diferencialinių lygčių sistema.
4. Autonominė diferencialinių lygčių sistema.
5. Vektorinė normaliosios diferencialinių lygčių sistemos forma.
6. Geometrinė ir mechaninė normaliosios sistemos prasmė.

10.1 Svarbiausios sąvokos

Šiame skyriuje nagrinėsime įvairias diferencialinių lygčių sistemas. Pagrindinis dėmesys bus skiriamas diferencialinių lygčių sistemų normaliajai formai. Naginėsime tokios sistemos ypatinguosius taškus. Plačiau bus analizuojama dviejų tiesinių diferencialinių lygčių sistema ir tiriama jos sprendinio elgsena ypatingųjų taškų aplinkoje.

Pirmiausia apibrėšime pagrindines sąvokas.

10.1 Apibrėžimas. Diferencialinių lygčių sistema vadinama sistema

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m)}) = 0, \end{cases}$$

kurioje x – laisvasis kinatmasis, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$ – nežinomos funkcijos, o y_j^i – atitinkamos funkcijų išvestinės.

Mes apsiribosime tik tokiomis diferencialinių lygčių sistemomis, kurios bus išspręstos aukščiausių išvestinių atžvilgiu, t. y. toliau bus nagrinėjamos tik tokio pavidalo diferencialinių lygčių sistemos:

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m-1)}), \\ y_2^{(k_2)} = f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m^{(k_m)} = f_m(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m-1)}). \end{cases}$$

Tokia diferencialinių lygčių sistemos forma vadinama kanonine forma. Visas kanoninės formos diferencialinių lygčių sistemos išvestines pakeitus naujomis funkcijomis gaunama diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{cases} \tag{10.1}$$

sudaryta iš $k_1+k_2+\cdots+k_m$ lygčių ir vadinama normaliąja diferencialinių lygčių sistemos forma arba diferencialinių lygčių sistemos Koši normaląja forma. Normaliosios sistemos eile vadinamas ją sudarančių diferencialinių lygčių skaičius. Tokiu atveju, (9.1) sistemos eilė yra lygi m.

10.2 Apibrėžimas. (9.1) sistema, kurios dešinės pusės funkcijos yra tiesinės nežinomų funkcijų atžvilgiu, vadinama tiesine diferencialinių lygčių sistema. Jos pavidalas:

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1m}y_m + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{2m}y_m + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m' = p_{m1}(x)y_1 + p_{m2}y_2 + \cdots + p_{mm}y_m + f_m(x), \end{cases} \tag{10.2}$$

čia $p_{ij}(x)$ ir $f_i(x)$ – žinomos argumento x funkcijos.

10.3 Apibrėžimas. (9.1) normalioji diferencialinių lygčių sistema vadinama autonomine arba stacionariąja, jei visos jos dešinės pusės funkcijos f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ nepriklauso nuo x, t. y.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m' = f_m(y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{cases} \tag{10.3}$$

10.2 Diferencialinių lygčių sistemos normaliosios formos analizė

Šiame skyrelyje plačiau nagrinėsime normaliąsias diferencialinių lygčių sistemas ir jų sprendinius.

10.4 Apibrėžimas. (9.1) ((9.3))normaliosios diferencialinių lygčių sistemos sprendiniu vadinamas m funkcijų rinkinys $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_m = y_m(x)$ (visos funkcijos yra apibrėžtos ir diferencijuojamos), jei jį įrašę į sistemą gauname tapatybes.

Veiksmas, kuriuo nustatomi sistemos sprendiniai, vadinamas sistemos integravimu.

10.5 Apibrėžimas. (9.1) ((9.3))normaliosios diferencialinių lygčių sistemos bendruoju sprendiniu vadinamas m funkcijų rinkinys

$$\begin{cases} y_1 = \phi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_m), \\ y_2 = \phi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = \phi_m(x, C_1, C_2, \ldots, C_m), \end{cases} \tag{10.4}$$

tenkinantis visas sistemos lygtis.

(9.1) normalioji diferencialinių lygčių sistema, sudaryta iš m lygčių yra ekvivalenti vienai m – osios eilės diferencialinei lygčiai. Iš tiesų, jei diferencialinių lygčių sistemos dešinės pusės funkcijos $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ yra diferencijuojamos $(m-1)$ kartą, tai diferencijuodami pagal x $(m-1)$ kartą, pavyzdžiui pirmąją sistemos lygtį, ir keisdami funkcijų y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ išvestines atitinkamomis funkcijomis f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, gausime sistemą:

$$\begin{cases} y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} f_m \equiv \Phi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_1''' = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_m} f_m \equiv \Phi_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(m)} = \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_m} f_m \equiv \Phi_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{cases} \tag{10.5}$$

Jei šios sistemos determinantas nelygus nuliui, tai galima nustatyti funkcijas $y_2, y_3, \ldots, y_m$. Jos priklausys nuo kintamojo x ir nuo y_1, y_1', y_1'', $\ldots$, $y_1^{(m-1)}$. Tuomet (9.5) sistemos paskutinioji lygtis gali būti užrašoma taip:

$$y_1^{(m)} = \Phi(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(m-1)}). \tag{10.6}$$

Gavome vieną m – osios eilės diferencialinę lygtį.

Tačiau galimas ir atvirkštinis veiksmas, t. y. iš vienos m – osios eilės diferencialinės lygties galime gauti m diferencialinių lygčių sistemą. Suformuluosime m – osios eilės diferencialinės lygties sprendinio egzistavimo ir vienaties teoremą:

10.1 Teorema. *m – osios eilės diferencialinė lygtis, kurios dešinės pusės funkcija yra tolydi visų argumentų atžvilgiu, o argumentų $y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(m-1)}$ atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą, turi vienintelį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $x = x_0$, $y_1 = y_1^0$, $y_1' = y_1'^0$, $\ldots$, $y_1^{(m-1)} = y_1^{(m-1)^0}$.*

Jei (9.1) normaliosios sistemos dešinės pusės funkcijos ir visos jų dalinės išvestinės pagal $y_1, y_2, \ldots, y_m$ yra tolydžios visų argumentų atžvilgiu tam tikroje srityje D, tai iš to, ką esame aptarę, turime, kad egzistuoja vienitelė sprendinių sistema

$$\begin{cases} y_1 = \phi_1(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0), \\ y_2 = \phi_2(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = \phi_m(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots y_m^0), \end{cases} \tag{10.7}$$

tenkinanti pradines sąlygas $x = x_0$,$y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$, $\ldots$, $y_m = y_m^0$. Šioje sistemoje pradines sąlygas pakeitę neapibrėžtomis konstantomis, turime sistemos bendrąjį sprendinį (9.4), kuris dar vadinamas normaliosios sistemos bendruoju integralu. Sistemą išsprendę konstantų C_1, C_2, $\ldots$, C_m atžvilgiu, gauname sistemos pirmuosius integralus:

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ C_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_m = \psi_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{cases} \tag{10.8}$$

Pirmieji sistemos integralai yra nustatomi ne vienareikšmiškai.